DM – Corrigé

I Satellite elliptique

1. Cours : force centrale donc moment cinétique constant donc $\overrightarrow{OM}$ constamment perpendiculaire à un vecteur constant : le mouvement est donc plan. Dans la base cylindrique, on a $\overrightarrow{L}_0(M) = mr\overrightarrow{e_r} \wedge (r'\overrightarrow{e_r} + r\theta'\overrightarrow{e_\theta} = mr^2\theta'\overrightarrow{e_z}$. On a donc bien $\mathcal{C} = r^2\theta'$ constant. D'après les CI's $\mathcal{C} = r_0 v_0$.
2. L'énergie mécanique, constante, vaut $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0} = \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0}\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) < 0$: état lié, donc trajectoire bornée.
3. L'énergie potentielle effective est $E_{\text{p,eff}} = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_t m}{r}$ or $\mathcal{C} = r_0 v_0$ donc $E_{\text{p,eff}} = \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0}\left(\frac{\alpha^2 r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r}r\right)$
4. Aux apsides, $r\dot{=}0$ donc $E_m = E_{\text{p,eff}}$. On pose alors $x = \frac{r_0}{r}$ et on doit résoudre $\frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0}\left(\frac{\alpha^2 r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r}r\right) = \frac{\mathcal{G}M_t m}{2r_0}\alpha^2 - \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0}$ soit $\alpha^2 x^2 - 2x + 2 - \alpha^2 = 0$
5. On calcule le discriminant $\Delta = 4(1-\alpha^2)^2 > 0$ et on trouve 2 racines réelles $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{2-\alpha^2}{\alpha^2}$. La distance au périgée est donc $r_{\min} = r_0$ (c'est le point de départ) et celle à l'apogée est $r_{\max} = \frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}r_0$.
6. On a alors $r_0 = \frac{\mathcal{P}}{1+e}$ et $r_{\max} = \frac{\mathcal{P}}{1+e}$ donc en calculant le rapport des deux distances, on arrive à $e = \alpha^2 - 1$
7. 3ème loi de Képler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_t}$ avec $a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = \frac{r_0}{2-\alpha^2}$ donc $T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_t}\frac{r_0^3}{(2-\alpha^2)^3}}$

II Solide en rotation autour d'un axe

II.1 Rotation autour d'un axe horizontal

1. L'énergie potentielle de pesanteur est $-Mg\frac{L}{2}\cos\theta$. Le travail est égal à la diminution de l'énergie potentielle, donc : $W = Mg\frac{L}{2}(\cos\ \theta - 1)$
2. TEC : $\frac{1}{2}J_{Oy}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}J_{Oy}\Omega_0^2 = W$ soit $\dot{\theta}^2 = \Omega_0^2 + \frac{3g}{L}(\cos\theta - 1)$
3. La tige effectue un tour complet si pour $\theta = \pi$ $\dot{\theta} \neq 0$ soit $\Omega_0 > \sqrt{\frac{6g}{L}}$
4. PFD : $M\overrightarrow{a(G)/\mathcal{R}} = M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}$ d'où en projetant dans la base tournante :

$$\overrightarrow{R} = \begin{cases} R_x = & -M(g\cos\theta + \frac{L}{2}\dot{\theta}^2) \\ R_y = & 0 \\ R_Z = & M(g\sin\ \theta + \frac{L}{2}\dot{\theta}^2) \end{cases}$$

II.2 Action d'un couple moteur et d'un couple résistif

1. CF. cours
2. TSMC : $J_{Oy}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + \Gamma - C\dot{\theta}$ (1)
3. On multiplie la relation (1) par $\dot{\theta}$ ce qui donne :
   $\frac{\mathrm{d}1/2 J_{Oy}\omega^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Mg\frac{L}{2}\cos\theta}{\mathrm{d}t} + \Gamma\omega - \mathcal{P}_{\text{frottts}}$ Soit en moyennant sur une période : $0 = 0 + <\mathcal{P}_{\text{moteur}}> - <\mathcal{P}_{\text{frottts}}>$
   La puissance motrice sert en moyenne à lutter contre les frottements...
4. Il y a un « balourd » qui pourrait endommager l'arbre moteur (le poids a un moment non nul). Il vaut donc mieux faire tourner la tige autour de sa médiatrice. (On parle d'équilibrage dynamique)