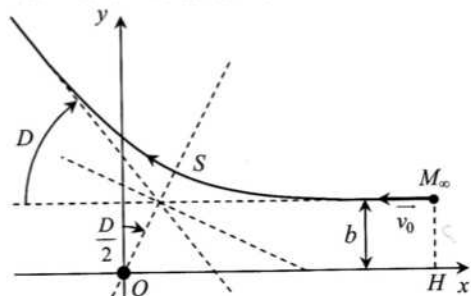


DM Forces centrales

Pour ce DM, on rappelle que la force électrostatique s'exerçant sur une particule chargée q_1 par une particule chargée q_2 située à une distance r est de norme $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ où ϵ_0 est une constante fondamentale de la physique appelée permittivité du vide.

1 Diffusion de Rutherford

Entre 1909 et 1911, Ernest Rutherford et ses deux étudiants Hans Geiger et Ernest Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α , dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne recontraint que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0 \vec{e}_x$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z . Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O . Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.

Données : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et $Z_{\text{Au}} = 79$.

1 - Exprimer la force électrique subie par la particule α sous la forme $\vec{F} = K/r^2 \vec{e}_r$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.

2 - Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.

3 - Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la particule α en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy) , montrer que $\vec{L}_O$ s'exprime de manière simple en fonction de r et θ .

4 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_p^*(r)$$

en explicitant la fonction $E_p^*(r)$. Comment l'appelle-t-on ?

5 - On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de E_m lorsque $r = r_{\min}$. En déduire

$$r_{\min} = \frac{K}{m v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m b v_0^2}{K} \right)^2} \right]$$

6 - On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donnée par

$$\tan \frac{D}{2} = \frac{K}{m b v_0^2}.$$

Calculer b puis $r_{\min}$ pour $D_1 = 60^\circ$ et $D_2 = 180^\circ$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

2 Modèle de Bohr

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m , charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données : constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $1,0 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.

5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}.$$

Calculer numériquement E_0 .

7 - La condition de quantification peut se retrouver de manière élégante en termes d'ondes de matière. Rappelons que la longueur d'onde de de Bröglie associée à une particule se déplaçant à la vitesse v vaut $\lambda = h/mv$. Montrer que la condition de quantification peut s'écrire sous la forme

$$2\pi r_n = n\lambda.$$

Comment interpréter cette condition en termes ondulatoires ?