

DS n°2 – Durée 2 heures

1 Capteur d'empreintes digitales – Centrale MP 2019

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2.2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



Figure 21 Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

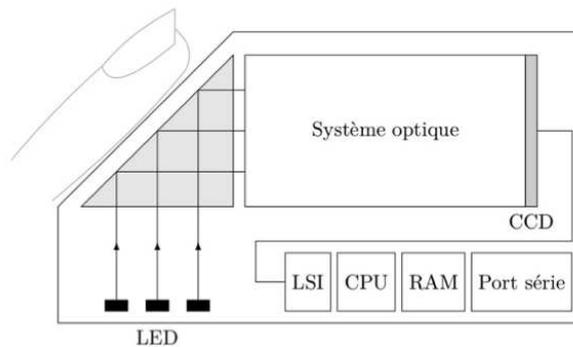


Figure 22 Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre (\mathcal{D}) et d'une lentille convergente (\mathcal{L}) (figure 2.3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre (\mathcal{D}) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille (\mathcal{L}).

On définit les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1A'_1} \quad D = \overline{AA'_1} \quad p = \overline{OA_1} \quad p' = \overline{OA'_1}$$

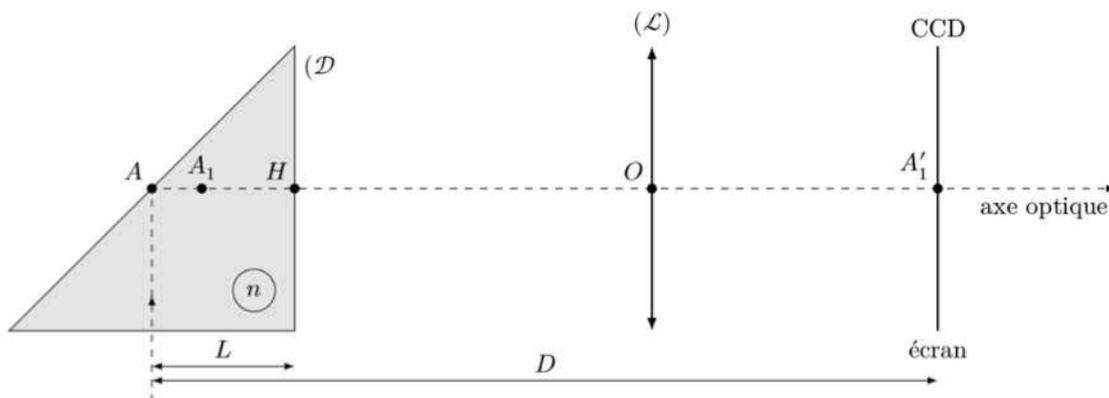


Figure 23 Schéma optique

1.1 Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . A cet effet, on donne $n = 1,5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = \frac{p'}{p}$ du système optique.

1. Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit $\overline{HA_1} = \frac{\overline{HA}}{n}$

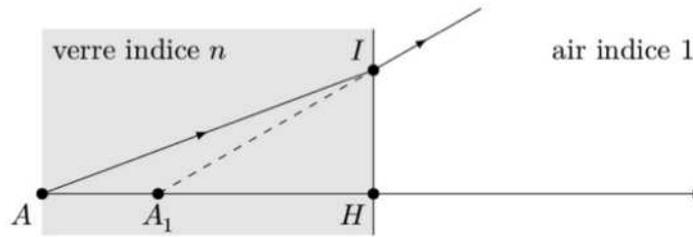


Figure 24

2. Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ . Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ .
3. On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport $\frac{D_1}{f'}$ est inférieurement borné. Pour cela, on exprimera $\frac{D_1}{f'}$ en fonction de γ . On appellera $g(\gamma)$ cette fonction et on étudiera les variations de g pour en rechercher son minimum. En déduire l'inégalité vérifiée par f' .
4. On suppose $\gamma = -2$. Exprimer puis calculer p' et f' .
5. Question technique non obligatoire On souhaite avoir une image la plus agrandie possible mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1 . Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on?

1.2 Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en A_1 au lieu de A

$$A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} A'_1$$

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 3\mu\text{m}$ et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100\mu\text{m}$. On note ℓ_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1 , à l'écran CCD (figure 2.5).

Sur la figure 2.6, les points M_1 , M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M'_1 , M'_2 et M'_3 détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M'_2 ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ .

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$, avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3 . On note alors $\gamma = \frac{p'}{p}$ le grandissement. On donne $\gamma = -2$.

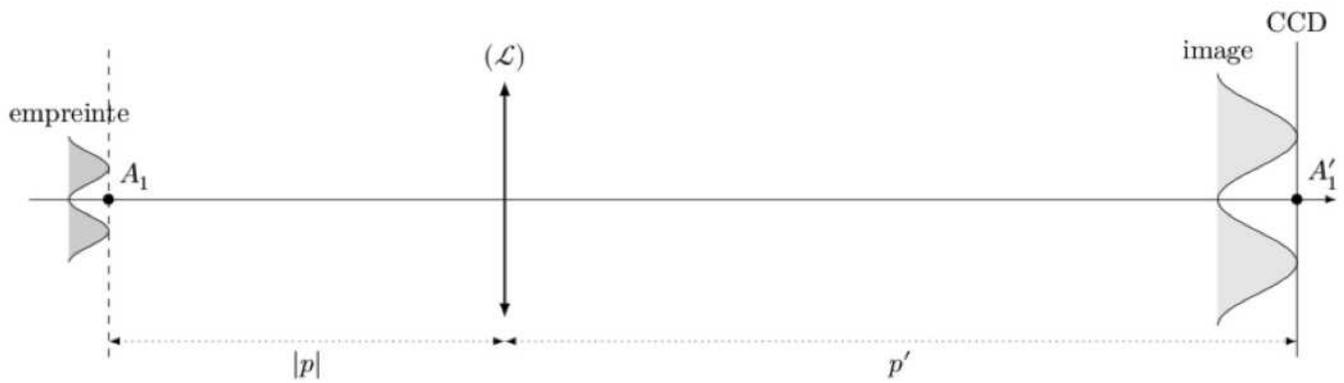


Figure 25

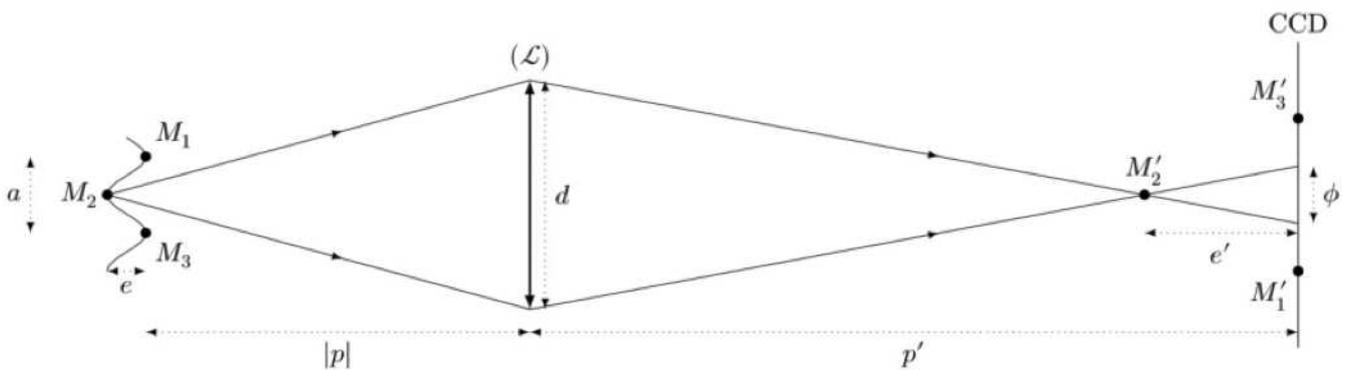


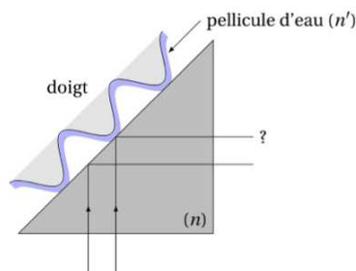
Figure 26 Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

1. A quelle condition sur a et sur ℓ_c peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommanderiez-vous ?
2. On note d le diamètre de la monture de la lentille (\mathcal{L}). Montrer que $\varphi = \frac{\gamma de}{p}$ dans l'approximation où $e \ll |p|$ et $e' \ll p'$. Indication : on pourra montrer dans un premier temps, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de la relation de conjugaison de Descartes au point M_2 que $e' \simeq 2\gamma e$.
3. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tache excède la distance $M'_1 M'_3$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

1.3 Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

1. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.
2. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.
3. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1,5$.
4. En réalité le doigt est toujours entouré d'une fine pellicule d'eau (indice $n' = 1,3$). Cette pellicule est en contact avec le dioptre au niveau des crêtes, mais pas au niveau des creux. Qu'advient-il à un rayon lumineux frappant le dioptre entre le prisme et la pellicule d'eau ?

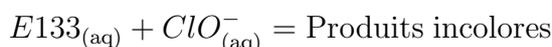


5. Expliquer alors comment l'utilisation des phénomènes de réfraction et réflexion totale permettent de résoudre le problème décrit au paragraphe 1.2.

2 Cinétique chimique

L'eau de Javel est une solution à base d'ions hypochlorite capable de décomposer de nombreuses substances organiques comme le bleu brillant (E133), colorant alimentaire fréquemment rencontré dans les boissons et les sucreries de couleur bleue.

La cinétique de la décomposition du bleu brillant en présence d'ions hypochlorite d'équation :



est suivie par spectrophotométrie en mesurant l'absorbance D de la solution au cours du temps à une longueur d'onde donnée. On suppose que la vitesse de la réaction v peut se mettre sous la forme : $v = k[E133]^\alpha [ClO^-]^\beta$ où α est l'ordre partiel par rapport au bleu brillant (E133), β l'ordre partiel par rapport aux ions hypochlorite ClO^- et k la constante de vitesse de la réaction. Cette réaction, qui admet un ordre global entier, est réalisée dans les conditions suivantes : température constante et égale à 298 K, milieu réactionnel homogène, réaction quantitative et volume constant.

A l'instant $t = 0$ min, on place dans un bécher de 50 mL un volume $V_1 = 25,0$ mL d'une solution aqueuse de bleu brillant de concentration molaire volumique $c_1 = 4,54 \times 10^{-6}$ mol/L et un volume $V_2 = 1,00$ mL d'une solution aqueuse d'hypochlorite de sodium ($ClO_{(aq)}^- + Na_{(aq)}^+$) de concentration molaire volumique $c_2 = 1,33 \times 10^{-2}$ mol/L.

1. Montrer que les conditions initiales utilisées vont permettre de déterminer la valeur de l'ordre partiel par rapport au bleu brillant (E133).
2. Montrer alors que la vitesse de réaction v peut se mettre sous une forme simplifiée. On notera k_{app} la constante apparente de vitesse.
3. Les résultats de l'étude expérimentale menée à 298 K sont rassemblés dans le tableau ci-dessous

| t (min) | 0 | 2,5 | 5 | 7,5 | 10 | 15 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| D | 0,582 | 0,275 | 0,138 | 0,069 | 0,034 | 0,009 |

Montrer que si l'on suppose que $\alpha = 1$ alors $\ln D$ est une droite de pente $-k_{app}$. Quelle est la valeur numérique de k_{app} ?

4. On réalise le même protocole que ci-dessus mais avec une solution d'hypochlorite de sodium de concentration $c_3 = 6,65 \times 10^{-3}$ mol/L. Les résultats expérimentaux sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| t (min) | 0 | 2,5 | 5 | 7,5 | 10 | 15 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| D | 0,389 | 0,275 | 0,195 | 0,138 | 0,097 | 0,069 |

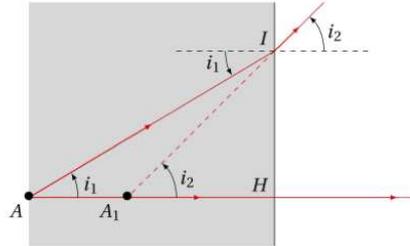
Montrer alors que l'on peut trouver l'ordre β par rapport aux ions hypochlorites. En déduire la valeur de la constante k

3 Capteur d'empreintes digitales

3.1 Conception du système optique

1. On a :

$$\tan(i_1) = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA}} \quad \tan(i_2) = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA}_1} \quad n \sin(i_1) = \sin(i_2)$$



Dans les conditions de Gauss, on a bien :

$$\boxed{\overline{HA}_1 = \overline{HA} \cdot \frac{i_1}{i_2} = \frac{\overline{HA}}{n}}$$

2. Par définition, $\gamma = \frac{p'}{p}$ et $D_1 = \overline{AA}_1' = \overline{AO} + \overline{OA}_1' = p' - p$. Ainsi :

$$p = \frac{D_1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}$$

Relation de conjugaison : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ ce qui conduit à

$$f' = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma D_1} - \frac{\gamma - 1}{D_1} \right)^{-1} = \frac{\gamma D_1}{-\gamma^2 + 2\gamma - 1} = -\frac{\gamma D_1}{(\gamma - 1)^2}$$

3. Comme nous l'incite l'énoncé, posons $g(\gamma) = \frac{D_1}{f'} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$

Calculons la dérivée $g'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$.

Déterminons le tableau de variation de cette fonction sur $] -\infty, 0[$:

| | | | |
|--------------|-----------|------------|------------|
| γ | $-\infty$ | -1 | 0^- |
| $g'(\gamma)$ | -1 | $-$ | $+$ |
| $g(\gamma)$ | $+\infty$ | \searrow | \nearrow |
| | | 4 | $+\infty$ |

La fonction admet un minimum en $\gamma = -1$. On en déduit :

$$g(\gamma) \geq 4 \quad \text{donc} \quad D_1 \geq 4f'$$

4. Trouvons dans un premier temps la valeur de D_1 .

$$D_1 = \overline{A_1 A_1'} = \overline{A_1 H} + \overline{H A} + \overline{A A_1'} = L \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + D = 9,0 \text{ cm}$$

On suppose que $\gamma = -2$. La distance focale de la lentille vaut : $f' = \frac{D_1}{g(-2)} = 2,0 \text{ cm}$

Cherchons la distance lentille-écran $p' = \overline{O A_1'}$.

$$\gamma = -2 = \frac{p'}{p} \quad \text{donc} \quad p' = -2p = -2 \frac{D_1}{\gamma - 1} = 6,0 \text{ cm}$$

5. Question facultative : On a (avec $|\gamma| = -\gamma$) :

$$g(\gamma) = \frac{D_1}{f'} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma} \Rightarrow dg = -D_1 \frac{df'}{f'^2} = \left(-1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma \Rightarrow d|\gamma| = \frac{D_1}{\underbrace{f'^2 \left(\frac{1}{|\gamma|^2} - 1\right)}_{< 0}} df'$$

On veut qu'une variation de f' fasse augmenter $|\gamma|$, ie. que $d|\gamma| > 0$. Il faut donc $\boxed{df' < 0}$, c'est-à-dire diminuer f' . Or, en diminuant f' , on augmente la courbure des dioptries. On peut alors quitter l'hypothèse lentille mince. De plus, on approche la lentille de l'objet. La distance objet-lentille n'est plus négligeable devant la taille de l'objet : son diamètre apparent devient grand, on quitte les conditions de Gauss.

Enfin, $|p|$ diminue avec f' mais est limité par l'épaisseur du verre du prisme : $|p| > D - D_1$.

3.2 Résolution de l'image

1. Soit a la distance entre deux crêtes sur le doigt (objet). Ils sont distinguables si leurs images sont séparées de $2\ell_c$ (crête sur un pixel, creux sur le voisin, puis crête sur le pixel d'après). Or, par définition du grandissement, cet écart vaut :

$$|\gamma| a \geq 2\ell_c \quad \text{donc} \quad \ell_c \leq 100 \mu\text{m}$$

2. Relation de conjugaison sur M_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p' - e'} - \frac{1}{p - e} &= \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p'} \left(1 - \frac{e'}{p'}\right)^{-1} - \frac{1}{p} \left(1 - \frac{e}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{f'} \\ &\Rightarrow \frac{1}{p'} \left(1 + \frac{e'}{p'}\right) - \frac{1}{p} \left(1 + \frac{e}{p}\right) \simeq \frac{1}{f'} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$. On en déduit :

$$\frac{e'}{p'^2} - \frac{e}{p^2} \simeq 0 \Rightarrow e' \simeq \left(\frac{p'}{p}\right)^2 e = \gamma^2 e$$

On travaille ensuite dans les triangles rectangles de sommet M'_2 :

$$\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{\phi/2}{e'} = \frac{d/2}{p'} \Rightarrow \phi = \frac{e'd}{p' - e'} = \frac{e'd}{p'} \left(1 - \frac{e'}{p'}\right)^{-1} \simeq \frac{e'd}{p'} \left(1 + \frac{e'}{p'}\right)$$

Or, $\frac{e'}{p'} = \frac{\gamma^2 e}{\gamma p} = \frac{\gamma e}{p}$. Ainsi : $\phi \simeq \frac{\gamma e d}{p} \left(1 + \frac{\gamma e}{p}\right)$. On continue de travailler à l'ordre 1, ainsi : $\boxed{\phi \simeq \frac{\gamma e d}{p}}$.

3. On veut :

$$\phi > M'_1 M'_3 = |\gamma| M_1 M_3 = |\gamma| a \Rightarrow \left|\frac{\gamma e d}{p}\right| > |\gamma| a \Rightarrow \boxed{d > \frac{|p| a}{e}}$$

Dans ce cas, les rayons extrémaux arrivent sur le bord de la lentille avec un angle θ tel que :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d/2}{|p|} > \frac{a}{2e} \Rightarrow \frac{\theta}{2} > \arctan\left(\frac{a}{2e}\right) = 1,5 \text{ rad} > 1 \text{ rad}}$$

Cette condition n'est pas compatible avec les conditions de Gauss.

3.3 Réflexion totale

1. Cf cours : 3 lois à énoncer (rayons coplanaires, angle de réflexion, angle de réfraction)
2. Réflexion totale : il n'existe pas de rayon réfracté. Il faut $n_1 > n_2$ et $i > i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

3. On remarque que les conditions sont vérifiées :

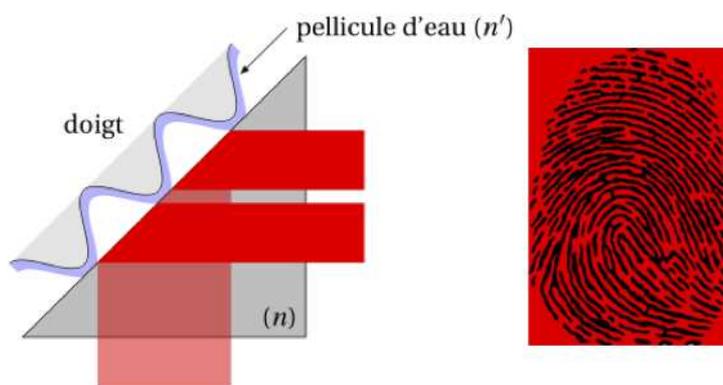
- $n = 1,5 > 1$
- $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 42^\circ < i = 45^\circ$

Il y a donc toujours réflexion totale : le laser n'éclaire donc pas l'empreinte.

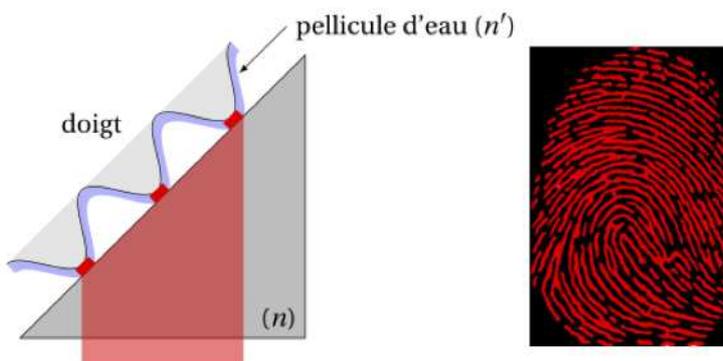
4. L'angle limite au niveau de la pellicule d'eau (de la crête donc) vaut alors $i'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1,3}{1,5}\right) = 60^\circ > i = 45^\circ$. Il y a réfraction.

5. 2 interprétations :

34) Interprétation 1 (cas où la lumière du laser frappe le capteur sans lentille intermédiaire) : là où il y a une crête, la lumière du laser est réfractée, elle n'arrive qu'en petite quantité au niveau du capteur. Au contraire, au niveau des creux, la lumière est réfléchie totalement et atteint massivement le capteur : l'empreinte apparaît en négatif.



Interprétation 2 (cas où on place la lentille pour imager le dioptré) : là où il y a une crête, la lumière du laser est réfractée et éclaire la crête. Au contraire, au niveau des creux, la lumière est réfléchie et n'éclaire pas le creux. Seules les crêtes sont alors des sources de lumière. L'empreinte apparaît en positif.



4 Cinétique chimique

1. On doit tenir compte de la dilution : $[E133]_0 = \frac{c_1 V_1}{V_1 + V_2} = 4,38 \times 10^{-6} \text{ mol/L}$ et $[ClO^-]_0 = \frac{c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 5,12 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$ donc $[ClO^-]_0 \gg [E133]_0$: large excès de ClO^-

2. On a $[ClO^-] \simeq [ClO^-]_0$ et donc

$$v = k_{\text{app}}[E133]^\alpha$$

avec $k_{\text{app}} = k[ClO^-]_0^\beta$

3. On a $v = -\frac{d[E133]}{dt} = k_{\text{app}}[E133]^1$. La solution de l'équa diff est $[E133] = [E133]_0 e^{-k_{\text{app}}t}$.

La loi de Beer-Lambert donne $D = \varepsilon \ell [E133]$: l'absorbance est proportionnelle à $[E133]$. L'anamorphose est : $\ln D = cste - k_{\text{app}}t$. On trouve à la calculatrice une droite de pente $-0,28$: $k_{\text{app}} = 0,28 \text{ min}^{-1}$

4. Dans le cas d'un ordre 1, le temps de demi-réaction est $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{\text{app}}}$. On remarque que dans la première expérience, $t_{1/2} = 2,5 \text{ min}$ et dans la deuxième $t_{1/2} = 5,0 \text{ min}$: le temps a été multiplié par 2 donc k_{app} a été divisée par 2. Puisque $k_{\text{app}} = k[ClO^-]_0^\beta$ et que $c_2 = 2c_3$ on en déduit que $\beta = 1$

On trouve alors $k = \frac{k_{\text{app},1}}{c_2} = 21,1 \text{ L/mol/min}$