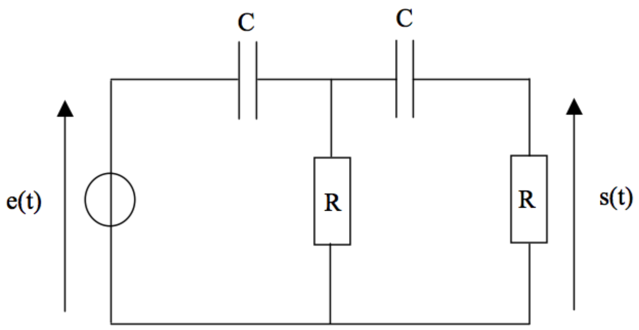
DS n°4 – Durée 2 heures

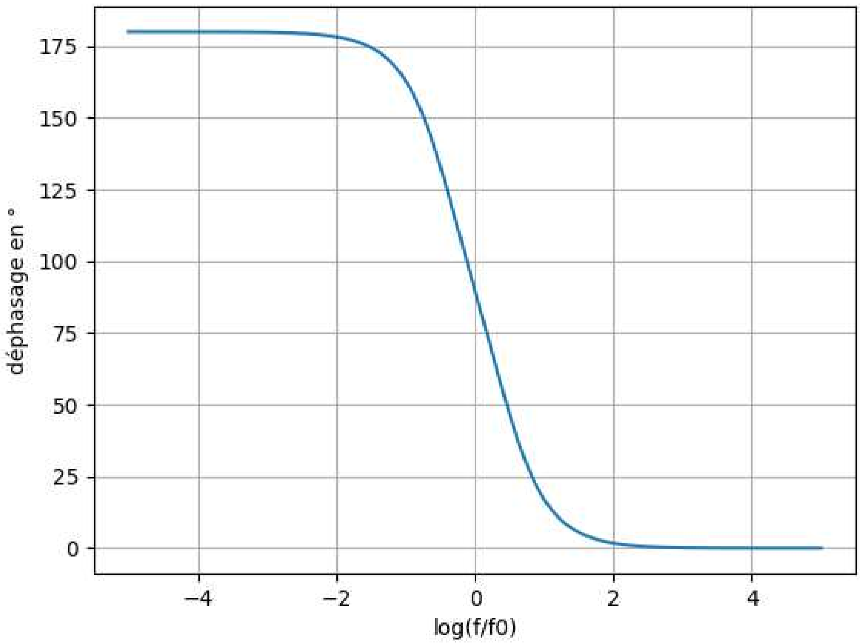
1 Etude d'un circuit linéaire d'ordre 2 (40 min.) – 13 pts

On s'intéresse au circuit ci-dessous en **régime permanent sinusoïdal**.

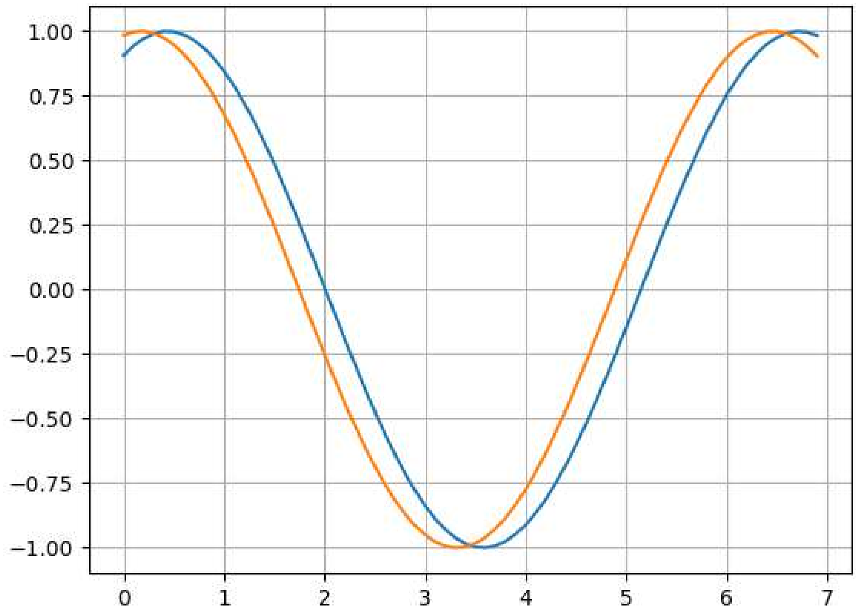


1. Etudier le comportement de ce filtre en basses fréquences puis en hautes fréquences et en déduire le type de filtre. (1 pt)
2. Calculer la fonction de transfert de ce filtre et la mettre sous la forme canonique : $\underline{H}(jx) = \dfrac{-x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite. Donner les expressions de ω_0 et Q. (3 pts)
3. Réécrire la fonction canonique sous la forme $\underline{H}(jy) = \dfrac{1}{1 - y^2 + j\dfrac{y}{Q}}$. Préciser l'expression de y. (2 pts)
4. Pour cette question on utilisera l'expression $\underline{H}(jy)$ de la fonction de transfert. Pour quelles valeurs de Q y a-t-il une résonance pour $\underline{H}$? On fera la démonstration et on précisera l'expression de la pulsation de résonance. Dans le cas étudié, y aura-t-il résonance ? (3 pts)

   Le diagramme de Bode de la phase est représenté ci-dessous avec en abscisses $\log\left(\dfrac{f}{f_0}\right) = \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$:

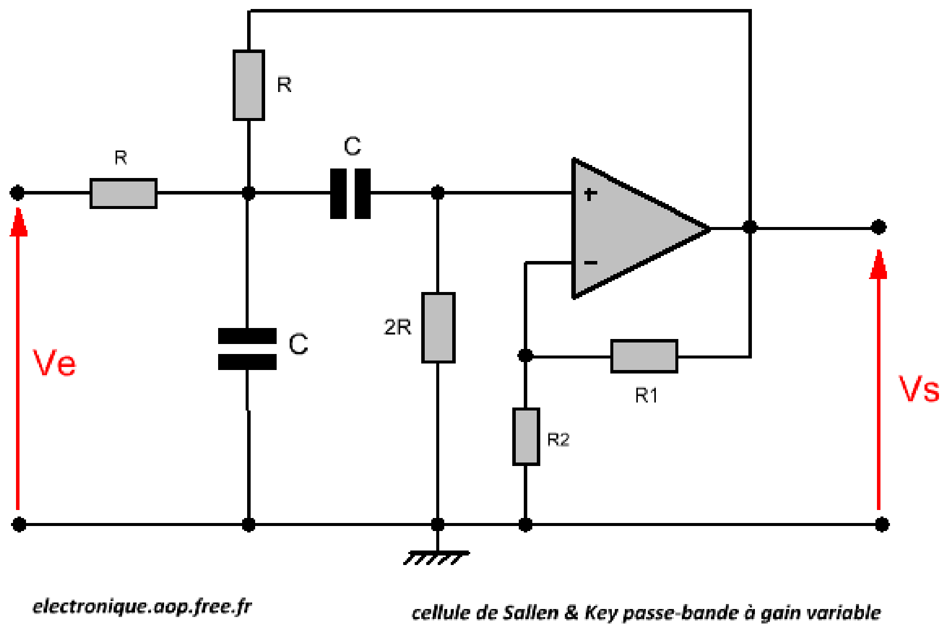


5. Sur l'oscillogramme ci-dessous sont affichées les tensions $e(t)$ et $s(t)$. **Attention : les graduations sont arbitraires !** Laquelle des deux est en avance sur l'autre ? Quelle est la tension qui représente la sortie $s(t)$? Evaluer numériquement le déphasage. En vous servant du diagramme de Bode de la phase, trouver la fréquence des signaux. (4 pts)



2 Filtres de Sallen-Key (40 min.) – 17 pts

On s'intéresse au filtre suivant :



1. Par une étude BF/HF, déterminer le type du filtre. (2 pts)
2. On pose $\alpha = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$. Quelle est la relation entre $\underline{V_-}$, $\underline{V_s}$ et α ? (1pt)

3. En appliquant la loi des nœuds en terme de potentiel (appelée théorème de Jacob Millman), montrer que la fonction de transfert du filtre se met sous la forme suivante (qui pourra être admise si non trouvée) (3 pts)
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{\alpha + (3\alpha - 1)jRC\omega + \alpha(jRC\omega)^2}$$
4. Réécrire alors la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$
On explicitera les expressions de Q, H_0 et ω_0 en fonction de R, C et α. (3 pts)
Même si cette question n'a pas été réussie, vous pouvez continuer.
5. Définir et calculer les pulsations de coupure à -3 dB. On les exprimera en fonction de ω_0 et Q. Quelle est la largeur de la bande passante ? On l'exprimera en fonction de ω_0 et Q. (3 pts)
6. On reprend l'expression de la fonction de transfert de la question 4 et on relève le tableau de valeurs suivant :

Fréquence (Hz)	Gain en dB	Déphasage sortie/entrée
500	+3dB	$\pi/4$
1000	+6dB	0
1500	+3dB	$-\pi/4$

En déduire la valeur de H_0, de Q et de ω_0. (3 pts)
7. En gardant les valeurs précédentes pour H_0, Q et ω_0, on envoie un signal d'entrée d'expression $V_e(t) = 2\times\cos(2\pi \times 500 \times t) + 1\times\cos(2\pi \times 1000 \times t) + 0,5\times\cos(2\pi \times 1500 \times t)$. Donner l'expression du signal de sortie. (2 pts)

3 Etude d'un circuit linéaire d'ordre 2 (40 min.) – 13 pts

1. BF : $V_s = 0$ et HF : $V_s = V_e$: c'est un passe-haut. (1 pt)
2. Millman au noeud milieu et à la sortie et il vient $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{2}$ (1 pt Millman, 1 pt suite calcul et 1 pt pour ω_0 et Q
3. Diviser par $-x^2$ au numérateur et au dénominateur. Il vient $y = \dfrac{1}{x}$ (2 pts)
4. Question de cours : $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ Ici pas de résonance car $Q = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (1+1+1 pts)
5. La courbe de gauche est en avance : c'est donc $s(t)$. Le décalage des deux courbes est d'environ 5% de la période soit dans les 15-20°. Sur le graphique du déphasage, cela correspond à $\log(f/f_0) \simeq 1$ soit $f \simeq 10f_0$ (4 pts)

4 Filtres de Sallen-Key (40 min.) – 17 pts

1. En BF les condos se comportent comme des interrupteurs ouverts et en HF comme des fils... (2 pts)
2. Diviseur de tension à la borne - : $V_- = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}V_s = \alpha V_s$ (1 pt)
3. On applique Millman en A (noeud à la croisée des 4 fils à l'entrée) et à la borne + puis substitution... (à voir en classe ensemble) (3 pts)
4. Il suffit de faire passer le numérateur au-dessous puis de forcer en factorisant par $(3\alpha - 1)$. En identifiant immédiatement, on arrive à $H_0 = \dfrac{1}{3\alpha - 1}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{\alpha}{3\alpha - 1}$ (3 pts)

5. Cf. cours : $\omega_{c(1,2)} = \omega_0 \left(\pm \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}}{2} \right)$. (2 pts)

   Largeur de la bande passante : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (1 pt)

6. Le déphasage nul a lieu pour $\omega = \omega_0 = 2\pi \times 1000$. Le gain vaut 6dB donc le module de $H = H_0$ vaut 2.
   Les fréquences 500 et 1500 Hz sont les fréquences de coupure manifestement. On a $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1000}{1000} = 1$ (3 pts)

7. 2 effets : module et argument... D'où

   $$V_s(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \cos\left(2\pi \times 500 \times t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \cos\left(2\pi \times 1000 \times t + 0\right) + \frac{0,5}{\sqrt{2}} \times \cos\left(2\pi \times 1500 \times t - \frac{\pi}{4}\right)$$

   (2 pts)