DS n°7 – 04/04/24 – Durée 2 heures

1 Le trou noir Sagittarius $A^\star$ – 40 min.

En astrophysique, un trou noir est un objet céleste si compact que l'intensité de son champ gravitationnel empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper. De tels objets ne peuvent ni émettre ni réfléchir la lumière et sont donc noirs, ce qui en astronomie revient à dire qu'ils sont invisibles. Par les effets sur les trajectoires des étoiles proches, on peut déceler l'existence de tels objets massifs. Sagittarius $A^\star$ (en abrégé $SgrA^\star$) est un trou noir localisé au centre de la Voie Lactée, dans la constellation du Sagittaire.
En 2002, une équipe internationale conduite par Rainer Schödel de l'Institut Max Planck de physique extraterrestre a observé le mouvement de l'étoile S_2 proche de $SgrA^\star$ sur une durée de 10 ans et obtenu la preuve que cet astre est un objet extrêmement massif et compact. Les trajectoires reconstituées de certaines étoiles sont représentées sur la figure ci-dessous.

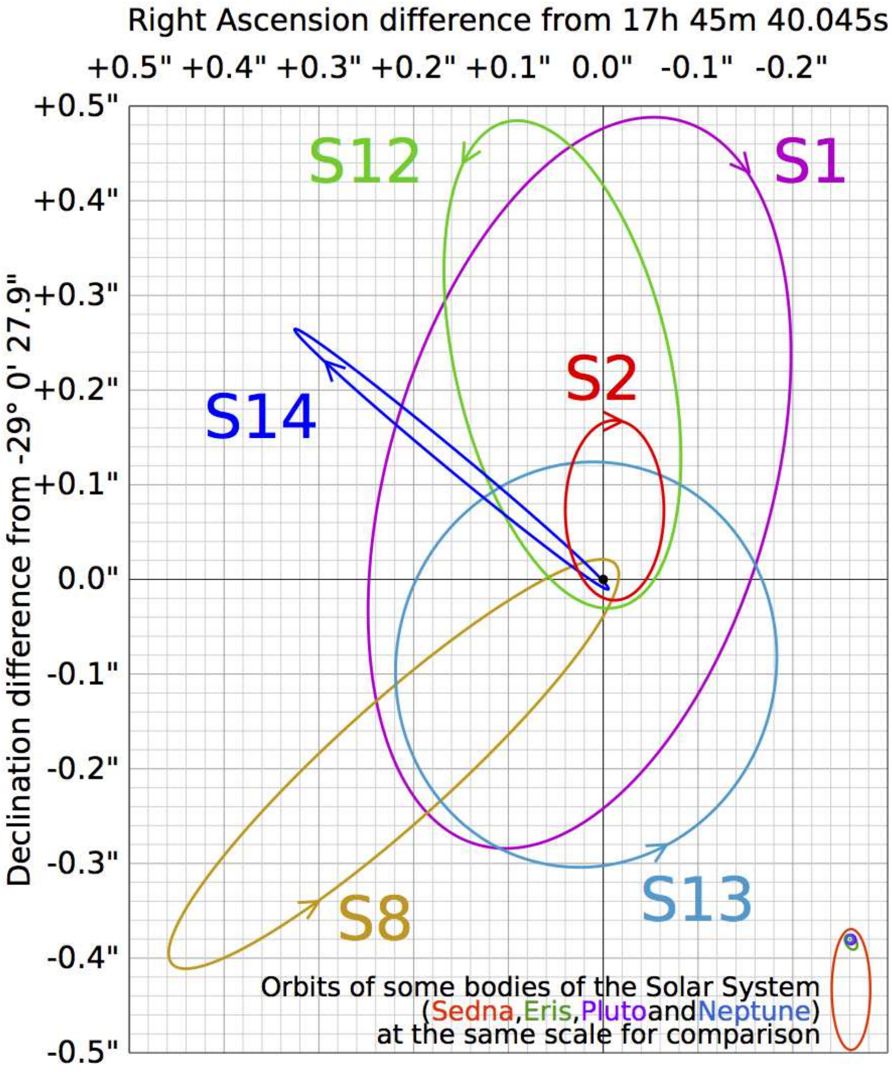


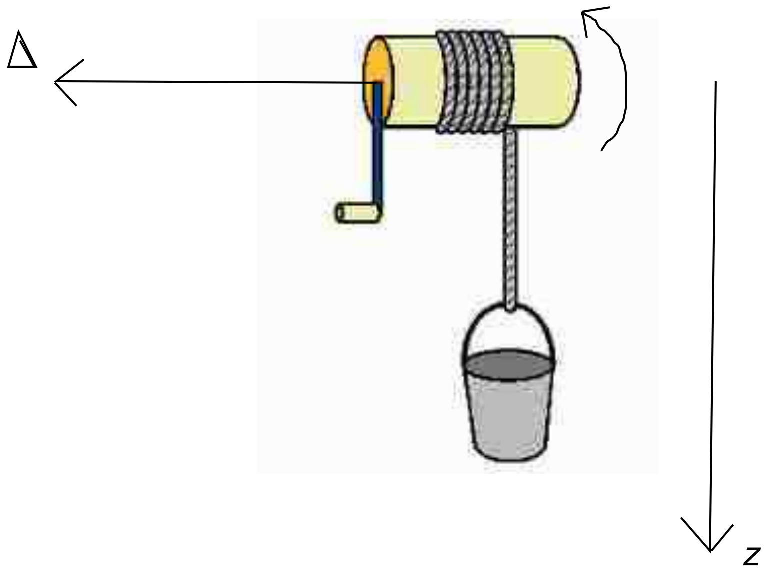
Figure 1 Orbites calculées de 6 étoiles autour du candidat trou noir supermassif Sagittarius A* au centre de la voie lactée. *Galactic centre orbits by Cmglee - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons*

1. On étudie un mobile ponctuel de masse m en orbite autour d'un astre A homogène et à symétrie sphérique, de masse M, de rayon R ; on note $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ SI la constante de la gravitation universelle. Déterminer l'expression de la première vitesse cosmique v_1 (vitesse d'une orbite circulaire basse) et celle de la seconde vitesse cosmique v_2 (vitesse de libération) en fonction de ces données.

2. On admettra que l'astre A forme un trou noir si $v_2 \to c = 3,00 \times 10^8$ m/s (célérité de la lumière). Exprimer le *rayon de Schwartzschild* noté R_S (rayon d'un trou noir de masse M) qui représente la valeur de R pour que la lumière ne puisse pas s'échapper de l'attraction du trou noir (on supposera que l'on peut appliquer les résultats de la mécanique classique au photon, ce qui est faux bien sûr). Calculer ce rayon dans le cas d'un astre de masse $M = 2 \times 10^{30}$ kg (masse du Soleil). Quelle est alors sa masse volumique ? Commentaire ?
3. En supposant que l'orbite de cette étoile est circulaire, établir l'expression de la troisième loi de Képler.
4. L'étoile S_2 en orbite autour de $SgrA^\star$, de masse $M = 8 \times 10^{36}$ kg a une orbite de période $T = 15,2$ ans. Calculer le grand-axe de l'orbite de S_2.
5. L'équation polaire des coniques est $r(\theta) = \dfrac{\mathcal{P}}{1 + e\cos\theta}$. On appelle $d_{\min}$ et $d_{\max}$ les distances minimale et maximale de S_2 par rapport à $SgrA^\star$. Etablir le lien entre l'excentricité e et ces deux distances.
6. L'excentricité de la trajectoire de S_2 est d'environ 0,7. Calculer $d_{\min}$.
7. En se servant de la figure 1, estimer la période de l'étoile S_1.

2 Mécanisme de puits – 40 min.

Une corde de diamètre très faible est enroulée autour d'un arbre cylindrique de rayon R et de masse M. Un seau plein d'eau de masse totale m est accroché au bout de la corde. Une personne actionne une manivelle qui remonte le seau à la vitesse constante v.
Pour les applications numériques, on prendra $R = 5$ cm ; $M = 5$ kg ; $m = M$; $v = 0,2$ m/s et $g = 9,8$ m/s^2



1. A quelle vitesse angulaire la personne fait-elle tourner l'arbre du puits ? On fera l'application numérique et on donnera le résultat en tour par minute.
2. Quelle est l'expression littérale de la tension du morceau de corde au bout duquel est suspendu le seau ?
3. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur l'arbre cylindrique ? Calculer le moment scalaire par rapport à l'axe Δ de chacune de ces forces.
4. Appliquer ensuite le théorème scalaire du moment cinétique à l'arbre du puits et en déduire la norme $\mathcal{M}'$ du moment mécanique que doit exercer la personne sur le puits. Faire l'application numérique.
5. La manivelle est constituée d'un cylindre mobile fixé sur une tige reliée à l'arbre du puits. On note $L = 10$ cm la longueur de la tige de la manivelle. Avec quelle force la personne actionne-t-elle la manivelle ? Quelle puissance mécanique développe-t-elle ?

6. Quand le seau arrive à mi-hauteur dans le puits, la personne lâche la manivelle. On note J_m le moment d'inertie de la manivelle par rapport à l'axe de l'arbre et J_a le moment d'inertie de l'arbre toujours par rapport au même axe. Que vaut le moment d'inertie total $\mathcal{J}$ du treuil formé par l'arbre et la manivelle ?
7. En appliquant les lois de la mécanique, exprimer la tension du morceau de corde qui tient le seau en fonction de m, g et $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$ qui est l'accélération du seau selon z. Tous les frottements sont négligés.
8. Quelle est la relation entre la vitesse angulaire $\omega(t)$ de l'arbre cylindrique et l'accélération du seau $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$?
9. Appliquer le TMC scalaire à l'ensemble arbre cylindrique - manivelle, puis en déduire l'expression littérale de l'accélération angulaire $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ du cylindre lors de la chute du seau . On négligera tous les frottements. La liaison pivot en œuvre au niveau de l'arbre est supposée parfaite. La corde est de masse négligeable.
10. A un instant pris pour origine des temps ($t = 0$), la corde casse et le seau tombe au fond du puits. L'arbre cylindrique a à cet instant une vitesse angulaire ω_0 à $t = 0$. On tient compte de frottements solides dont le moment est constant de norme Γ. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ de l'arbre. On ne tiendra pas compte de la corde.
11. Résoudre l'équation différentielle.
12. Donner l'expression littérale du temps de freinage de l'arbre cylindrique.
13. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression littérale du travail des frottements solides lors de cette phase de freinage ?

3 Le trou noir Sagittarius $A^\star$ – 16 pts

1. PFD dans le référentiel associé au TN :$-m\dfrac{v_1^2}{R} = -\dfrac{\mathcal{G}mM}{R^2}$ d'où $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M}{R}}$. **2 pts**

   Pour la vitesse de libération, il faut écrire que l'énergie mécanique est nulle : $E_m = 0 = \dfrac{1}{2}mv_2^2 - \dfrac{\mathcal{G}mM}{R}$ d'où $v_2 = \sqrt{2\dfrac{\mathcal{G}M}{R}}$ **2 pts**
2. Il suffit d'écrire que $c = v_2$ ce qui conduit à $R_s = \dfrac{2\mathcal{G}M}{c^2}$. **1 pt**

   AN : $R_s \simeq 3000$ m **1 pt**

   Masse volumique : $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R_s^3}$

   AN : $\rho = 1,9 \times 10^{19}$ kg/m^3 ce qui est énorme ! **1 pt**
3. On reprend l'expression de $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M}{R}} = \dfrac{2\pi R}{T}$ d'où $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$ **2pts**
4. En se servant de la 3ème loi de Képler, on trouve $a = \sqrt[3]{\dfrac{T^2\mathcal{G}M}{4\pi^2}}$

   AN : $a = 1,45 \times 10^{14}$ m et donc le grand axe de l'ellipse vaut $2a = 2,9 \times 10^{14}$ m. **1 pt**
5. En remarquant que $d_{\min} = \dfrac{\mathcal{P}}{1+e}$ et $d_{\max} = \dfrac{\mathcal{P}}{1-e}$, on arrive à $e = \dfrac{d_{\max} - d_{\min}}{2a}$ car $2a = d_{\min} + d_{\max}$ **2 pts**
6. $d_{\min} = a(1-e)$. AN : $d_{\min} = 0,44 \times 10^{14}$ m **1 + 1 pt**
7. Sur la figure 1, on remarque que le grand axe de S_1 est environ 4 fois plus grand que celui de S_2 donc en utilisant la troisième loi de Képler : $T_1 \simeq T_2\sqrt{4^3} \simeq 8T_2$. AN $T_1 \simeq 120$ ans. **2 pts**

4 Mécanisme de puits – 18 pts

1. Si le seau descend de z c'est que le cylindre a tourné d'un angle θ tel que la longueur de l'arc de cercle de rayon R vaille $R\theta = z$ donc en dérivant par rapport au temps, il vient $v = R\omega$. A.N. $\omega = \dfrac{v}{R} = 4$ rad/s soit encore 38 tr/min **2 pts**
2. Le seau est en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen associé aux parois du puits : son accélération est nulle et donc $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$. La tension de la corde vaut mg **1 pt**
3. Les forces qui s'appliquent sur l'arbre sont : **2 pts**
   — son poids $M\vec{g}$ qui passe par l'axe, donc de bras de levier nul : son moment est nul
   — la réaction de l'axe de bras de levier nul (liaison pivot parfaite) : son moment est nul
   — la force de tension de la corde de norme $T = mg$: son moment est de signe positif car elle a tendance à faire tourner le cylindre dans le sens indiqué par la figure du sujet. $\mathcal{M}(\vec{T}) = +TR$
   — la force communiquée par la manivelle de moment négatif car elle a tendance à faire tourner le cylindre dans le sens contraire de celui donné par la figure. On note $-\mathcal{M}'$ ce moment.
4. Le cylindre tournant à vitesse constante, son moment cinétique est constant et d'après le TMC, la somme des moments est nulle. Donc on a $\mathcal{M}' = mgR$. A.N : $\mathcal{M}' = 2,45\ \mathrm{N \cdot m}$ **2 pts**
5. On a $\mathcal{M}' = FL$ donc $F = 24,5\mathrm{N}$
   La puissance de cette force est $\mathcal{P} = F \times V = \mathcal{M}'\omega = 9,8$ W **2 pts**
6. $\mathcal{J} = J_m + J_a$ **1 pt**
7. En appliquant le PFD au seau en projection selon z, on obtient $m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - T$ donc la tension de la corde est $T = mg - m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$ **1 pt**
8. cf question 1 : $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ **1 pt**
9. TMC scalaire appliqué à l'arbre cylindrique : $\mathcal{J}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = TR$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{mgR}{\mathcal{J} + mR^2}$ **1 pt**
10. TMC scalaire : $\mathcal{J}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\Gamma$ (signe - car frottements...) **1 pt**
11. Solution de l'équation différentielle : $\omega(t) = -\dfrac{\Gamma}{\mathcal{J}}t+$ CI avec à $t = 0$ $\omega(t = 0) = \omega_0$ donc CI$= \omega_0$. In fine : $\omega(t) = \omega_0 - \dfrac{\Gamma}{\mathcal{J}}t$ **1 pt**
12. Le temps d'arrêt correspond à l'instant pour lequel $\omega(t) = 0$ donc $t_A = \dfrac{\mathcal{J}\omega_0}{\Gamma}$ **1 pt**
13. Appliquons le TEC au treuil constitué de l'arbre et de la manivelle entre l'instant $t = 0$ où la corde casse et $t = t_A$ où le treuil arrête de tourner. On a $\Delta E_c = \Sigma W(\vec{F})$
    D'une part, $\Delta E_c = 0 - \dfrac{1}{2}\mathcal{J}\omega_0^2$ et d'autre part,
    $\Sigma(W) = W(\text{frottements})$ (seule force qui travaille car le poids et la réaction de l'axe ne travaillent pas).
    Le travail des forces de frottements est donc $W = -\dfrac{1}{2}\mathcal{J}\omega_0^2$ **2 pts**