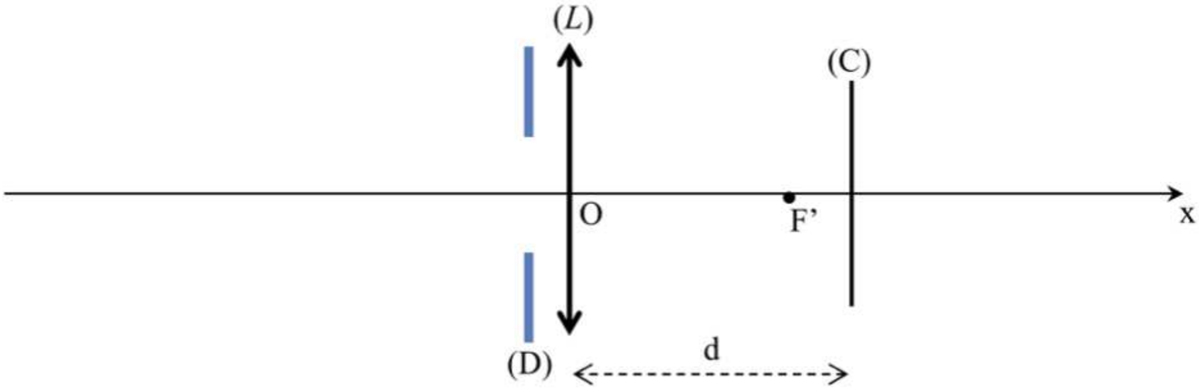
DS n°3 – Durée 2 heures

1 Appareil photo et téléobjectif (CCINP MP 21) – 45 min.

Donnée : relation de conjugaison de Descartes $\dfrac{-1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{f'}$

On modélise un appareil photo par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'} = 50$ mm appelée « objectif », d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

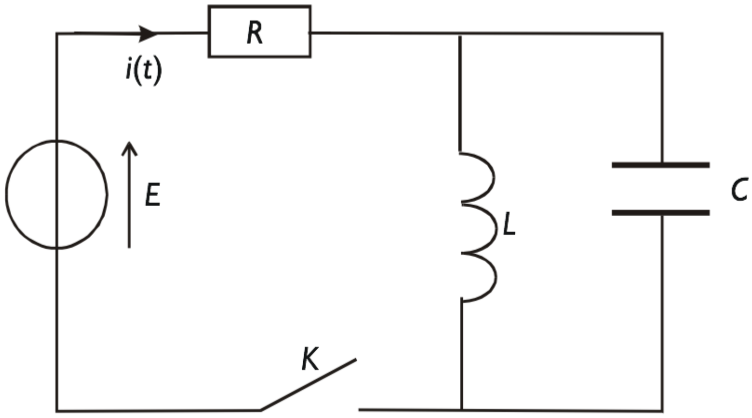


La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, elle est comprise entre $d_{\min} = 50$ mm et $d_{\max} = 55$ mm.
A l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur $h = 5,0$ m situé à une distance $L = 20$ m devant l'objectif.

1. En remarquant que $f' \ll L$, établir l'expression de la taille $A'B'$ de l'image de l'arbre sur le capteur.
2. Montrer qu'il existe une distance limite notée $L_{\min}$ en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image nette sur le capteur. Exprimer $L_{\min}$ en fonction de f' et $d_{\max}$. Faire l'application numérique.

   On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente de focale $f_1' = 10$ cm et une lentille (L_2) divergente de focale $f_2' = -5$ cm, séparée par une distance $e = 8$ cm. La distance L entre (L_1) et l'arbre n'a pas changé.
   On remarque que $f_1' \ll L$, l'arbre sera toujours considéré comme étant à l'infini.
   La lentille (L_1) donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2) qui en donne une image finale $A'B'$.
3. Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f_1' et e.
4. L'image $A'B'$ doit être réelle. En déduire que la distance e doit être sitéue dans une plage de valeurs bien précise : $e \in [e_{\min}; e_{\max}]$. Exprimer $e_{\min}$ et $e_{\max}$ en fonction de f_1' et f_2'. Vérifier que cette condition est bien réalisée avec les valeurs numériques données plus haut.
5. Compléter le schéma donné à la fin du sujet, où l'arbre AB est considéré à être à l'infini et en utilisant l'échelle 1 carreau horizontal $\leftrightarrow$ 1 cm. Placer les points F_1', F_1, F_2' et F_2 puis les images A_1B_1 puis $A'B'$.
6. Calculer le grossissement $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}$ en fonction de f_1' , f_2' et e.

2 Étude d'un circuit RLC – 30 min.



Initialement le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps. A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K. Dans cet exercice on supposera que

$$RC = \frac{L}{R} = \tau$$

1. Montrer que l'équation différentielle différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ est :(on pourra l'admettre pour poursuivre)
$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2} i(t) = \frac{E}{R\,\tau^2}$$
2. Montrer que les conditions initiales vérifient (on pourra les admettre pour poursuivre) : $i(0) = \frac{E}{R}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0) = -\frac{E}{R\tau}$ (**Question difficile**)
3. Résoudre alors complètement l'équation différentielle.
4. Que vaut la pulsation propre ω_0 de ce circuit ? Que vaut aussi la pseudo-pulsation ω_{pseudo} de ce circuit ?
5. Tracer soigneusement l'allure du courant $i(t)$ au cours du temps.

3 « Que la *force* soit avec toi... » – 30 min.

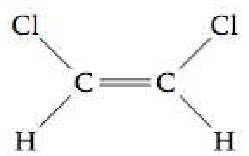
Les moteurs électriques de forte puissance installés dans les grosses pompes à chaleur ne peuvent pas fonctionner sur le secteur EDF classique, on a besoin de la « force » qui est une tension dérivée du triphasé d'EDF : 3 tensions de valeur efficace $U_{eff} = 240$ V déphasées de $2\pi/3$ sont créées. Ainsi, il y a $u_1(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t)$, $u_2(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + 2\pi/3)$ et $u_3 1(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + 4\pi/3)$.

1. Représenter dans le plan complexe les 3 vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ associés aux 3 tensions $u_1(t), u_2(t)$ et $u_3(t)$.
2. Est-ce que $u_3(t)$ est en avance de phase ou en retard de phase par rapport à $u_1(t)$? Représenter alors ces deux tensions réelles sur un oscillogramme en légendant bien !
3. Lorsque la « force » est installée dans un atelier, EDF délivre une tension $u_{k,\ell}(t) = u_k(t) - u_\ell(t)$ avec $k \neq \ell$ et $k = 1, 2$ ou 3 de même que ℓ. Montrer que quelque soit $k \neq \ell$ la tension $u_{k,\ell}$ a la même amplitude.
4. Pour simplifier, on prendra $k = 2$ et $\ell = 1$. Mettre sous la forme $u_f(t) = U_e\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi)$ la tension différence $u_2(t) - u_1(t)$. Calculer numériquement ψ et vérifier que $U_e \simeq 416$ V

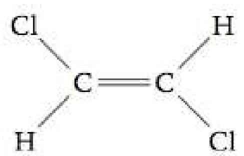
5. Le moteur électrique est branché sur la prise de force. Le moteur est modélisé par une impédance formée d'une bobine d'inductance L en série avec une résistance R. On appelle φ l'argument de l'impédance du moteur. Exprimer φ en fonction de R, L et ω. Est-ce que le courant est en avance ou en retard de phase sur la tension aux bornes du moteur ?
6. Etablir l'expression de l'intensité traversant le moteur en convention récepteur en fonction de U_e, R et L.
7. On suppose que $R = 5\Omega$ et $L = 10$ mH. En déduire la valeur numérique de l'intensité efficace.

4 Atomes, molécules et solvants – 15 min.

1. Donner le schéma de Lewis des molécules suivantes (le carbone est au centre de l'édifice moléculaire) : $CH_4, CH_3Cl, CH_2Cl_2, CHCl_3$ et CCl_4.
2. Parmi $CHCl_3$ et CCl_4, quelles sont les molécules solubles dans l'eau ?
3. On considère les isomères Z et E du dichloroéthène représentés ci-dessous.



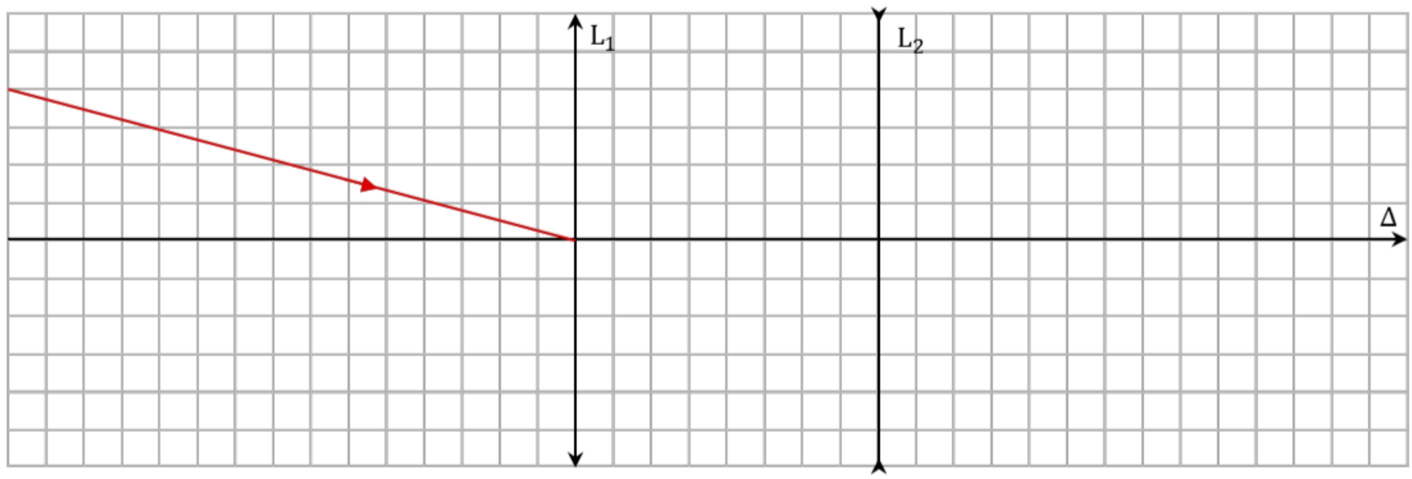
(a) isomère Z.



(b) isomère E.

   (a) Ces molécules sont-elles polaires ? protiques ?
   (b) Justifier la différence entre leurs températures d'ébullition : $T_{eb}(Z) = 60°C$ et $T_{eb}(E) = 40°C$

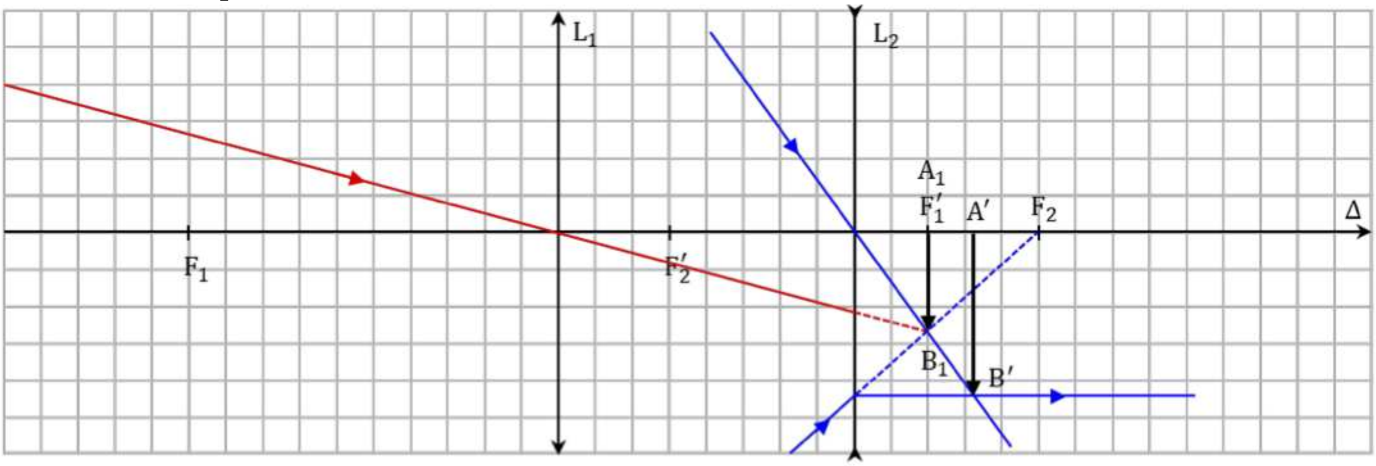
Échelle : 1 carreau horizontal ↔ 1 cm



DS n°3 – corrigé

1 Appareil photo et téléobjectif – 17 pts

1. L'arbre est considéré à l'infini, son image est dans le plan focal image. D'après le théorème de Thalès, on obtient $A'B' = \dfrac{hf'}{L} = 12,5$ mm **2pts**
2. Lorsque L diminue, d augmente. De plus, $L \to f'$, $d \to +\infty$. Puisque d ne peut pas dépasser la valeur d_{max}, on en déduit qu'il existe une valeur minimale de L. On a : $\dfrac{1}{d_{\text{max}}} + \dfrac{1}{L_{\text{min}}} = \dfrac{1}{f'}$. Soit : $L_{\text{min}} = \left(\dfrac{1}{f'} - \dfrac{1}{d_{\text{max}}}\right)^{-1} = 55$ cm. **2 +1 pts**
3. L'arbre est à l'infini, on a :$\overline{O_1A_1} = f'_1$. Puis, $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = f'_1 - e$ **2 pts**
4. Il faut donc que $\overline{O_2A'} > 0$. Avec la relation de conjugaison de Descartes, on a $\overline{O_2A'} = \dfrac{\overline{O_2A_1} \times f'_2}{\overline{O_2A_1} + f'_2} > 0$.
   Or $f'_2 < 0$ il faut donc que $0 < \overline{O_2A_1} < -f'_2$ soit $f'_1 > e > f'_1 + f'_2$.
   On a bien $f'_1 = 10\text{cm} > e = 8\text{cm} > f'_1 + f'_2 = 5\text{cm}$ **3 + 2 pts**
5. Construction : **2 pts**



6. On a $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{\overline{O_2A'}}{f'_1 - e}$ .La relation de Descartes donne $\dfrac{-1}{\overline{O_2A_1}} + \dfrac{1}{\overline{O_2A'}} = \dfrac{1}{f'_2}$. Donc $\overline{O_2A'} = \dfrac{f'_2(f'_1 - e)}{f'_1 + f'_2 - e}$ soit $\gamma = \dfrac{f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = \dfrac{5}{3}$ **2 + 1 pts**

2 Circuit RLC – 10 pts

1. On appelle i_L le courant qui descend dans la bobine. En paramétrant, on remarque que $i(t) = i_L + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$
   Soit, puisque$LC = \frac{L}{R}\frac{R}{C} = \tau^2$: $[\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2} i_L(t) = \frac{E}{R\,\tau^2}$ Par linéarité, l'équation différentielle homogène vérifiée par $i(t)$ est la même. Le second membre correspond à $i_\infty = \dfrac{E}{R}$ que l'on injecte dans l'équation homogène. L'équa diff vérifiée par $i(t)$ est donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau^2} i(t) = \dfrac{E}{R\,\tau^2}}$
   2 pts

2. La bobine se comporte au voisine de $t = 0$ comme un générateur de courant nul donc comme un circuit ouvert, alors que le condensateur se comporte comme un générateur de tension de *f.e.m.* nulle donc comme un fil. On a alors immédiatement $i(0^+) = \frac{E}{R}$.
   Pour la dérivée, il faut écrire que $i(t) = i_L + LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$ et évaluer à $t = 0$. En se servant de l'équation différentielle en i_L on trouve que $\dfrac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}(t = 0^+) = \dfrac{E}{RLC}$ et en dérivant l'équa diff en i_L on trouve alors que $\dfrac{d^3 i_L}{dt^3}(t = 0^+) = -\dfrac{E\tau}{R}$. En substituant, il vient $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{E}{R\tau}$ **1 + 2 pts**
3. Commençons par la solution homogène. L'équation caractéristique est $b^2 + \frac{1}{\tau}b + \frac{1}{\tau^2} = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -\frac{3}{\tau^2}$. On a donc deux racines complexes conjuguées : $\underline{b_1} = \frac{1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2\tau}$ et $\underline{b_1}^*$. La solution homogène est donc du type :

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2\tau}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2\tau}\right)\right]$$

   La solution particulière est une constante : $I_p = \frac{E}{R}$.
   Par superposition des solutions, il vient :

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2\tau}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2\tau}\right)\right] + \frac{E}{R}$$

   Les CI's permettent de calculer A et B.

$$\begin{cases} A + \dfrac{E}{R} = \dfrac{E}{R} \\ -\dfrac{1}{2\tau}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2\tau}B = -\dfrac{E}{R\tau} = 2\dfrac{E}{R} \end{cases}$$

   Ce qui conduit immédiatement à $A = 0$ et $B = -\frac{2E}{\sqrt{3}R}$. **3 pts**
4. La pulsation propre est $\omega_0 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\tau}$ et la pseudo-pulsation est $\omega_{\text{pseudo}} = \frac{\sqrt{3}}{2\tau}$ **1 pt**
5. Courbe donnant $i(t)$: **1 pt**

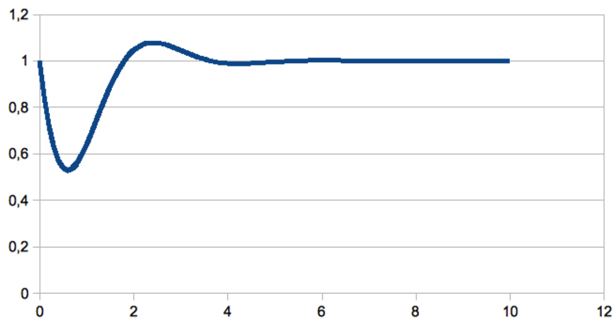


Figure 1 – Allure du régime pseudopériodique pour le courant $i(t)$

3 Que la « force » soit avec toi – 14 pts.

1. Schéma simple en étoile style « Mercedes » avec U_1 sur l'axe réel. **1 pt**
2. $u_1(t)$ est clairement en avance sur $u_3(t)$.
   Oscillogramme classique : u_1 prend ses maxima avant u_3 (un tiers de période avant) **2 pts**
3. Quelque soit $k \neq \ell$ la tension $u_{k,\ell}$ a la même amplitude : c'est la norme du vecteur représentant la diagonale de n'importe quel losange formé de U_ℓ et de U_k. **1 pt**

4. $u_2(t) - u_1(t) = U_{eff}\sqrt{2}\,(\cos(\omega t + 2\pi/3) - \cos(\omega t))$. En complexes : $\underline{u}_2(t) - \underline{u}_1(t) = U_{eff}\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\omega t}\left(\mathrm{e}^{j2\pi/3} - 1\right)$.
   Or $\mathrm{e}^{j\omega t}\left(\mathrm{e}^{j2\pi/3} - 1\right) = \mathrm{e}^{j\omega t}\left(-\dfrac{3}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{e}^{j\omega t} \times \sqrt{3}\mathrm{e}^{-j\arctan 1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{j(\omega t - \pi/6)}$.
   Détransmutation : $u_f(t) = U_{eff}\sqrt{2}\sqrt{3}\cos(\omega t - \pi/6)$. Donc $\psi = -\pi/6$ et $U_e = U_{eff}\sqrt{3} \simeq 416$ V **4 pts**
5. L'impédance du moteur est $\underline{Z} = R + jL\omega$. L'argument est donc $\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$. L'argument de $\underline{Z}$ représente le déphasage de la tension u par rapport au courant i. Ici l'argument est dans l'intervalle $[0; \dfrac{\pi}{2}]$, la tension est en avance sur le courant. **2 + 1 pts**
6. On a $\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$, donc $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \dfrac{U_e\sqrt{2}}{R + jL\omega}\mathrm{e}^{j\omega t} = \dfrac{U_e\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\mathrm{e}^{(j\omega t - \varphi)}$, donc en détransmutant :
   $i(t) = \dfrac{U_e\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)\right)$. **3 pts**
7. Le courant efficace est donc $I_e = \dfrac{U_e}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$
   AN : $I_e = 70,5$ A. C'est une grande intensité ! **2 pts**

4 Molécules et solvants – 6 pts

1. C au centre et les 4 autres atomes autour **1 pt**
2. Le chlore est très électronégatif, donc la liaison $C - Cl$ est fortement polaire. Par symétrie, CCl_4 est apolaire car la somme des vecteurs dipolaires est nulle, alors que dans le cas de $CHCl_3$ cette somme est non nulle : la molécule est polaire. **2 pts**
3. L'eau est un solvant polaire et dissout des molécules polaires : $CHCl_3$ est soluble dans l'eau mais pas CCl_4 **1 pt**
4. (a) Z est polaire car la somme des moments dipolaires est non nulle alors que E est polaire.**1 pt**
   (b) Les molécules polaires intéragissent entre elles via les forces de Van der Waals : pour faire évaporer des molécules polaires, il faut casser ces liaisons de vdW, donc fournir plus d'énergie et donc chauffer à plus haute température. **1 pt**