

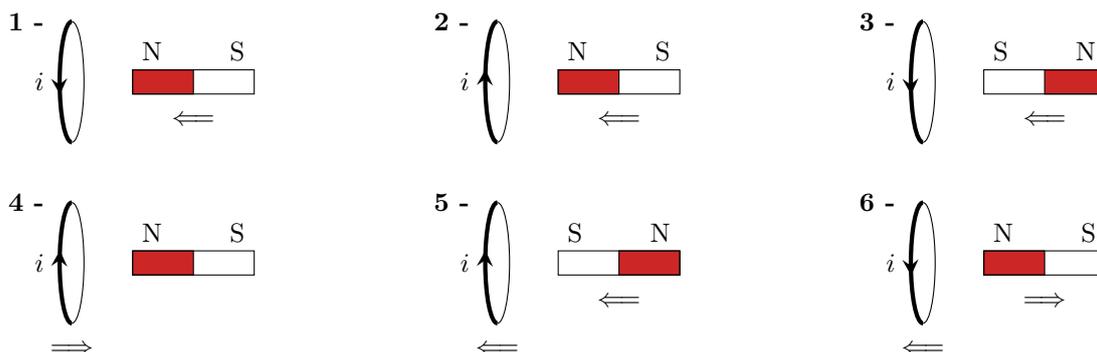
Induction 1 : exercices complémentaires

Exercices

Exercice 1 : Signe du courant induit

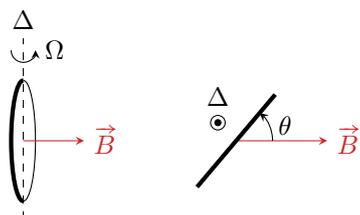
[◆◆◆]

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Indiquer le signe du courant i apparaissant dans la spire pendant le déplacement.



Exercice 2 : Spire en rotation

[◆◆◆]



Considérons une spire conductrice circulaire de surface S et de résistance électrique r . Cette spire est mise en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ constante autour d'un de ses diamètres, qui définit l'axe Δ , voir les figures en perspective et vue de dessus ci-contre. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} orthogonal à Δ .

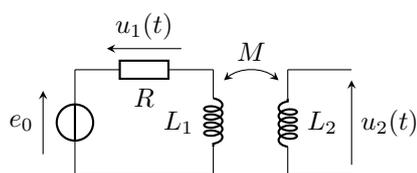
1 - Établir l'expression de la f.é.m. induite dans la spire. En déduire celle du courant induit dans la spire.

2 - Déterminer le moment magnétique instantané de la spire.

3 - En déduire le couple de Laplace instantané puis moyen qui s'exerce sur la spire. Quel est qualitativement son effet sur le mouvement de la spire? Aurait-on pu le prévoir sans calcul?

Exercice 3 : Mesure d'une inductance mutuelle

[◆◆◆]



Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure. La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100 \Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2,0 \text{ kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.

1 - Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici?

2 - Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1 .

3 - Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00 \text{ V}$ et $U_2 = 0,50 \text{ V}$.

4 - On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

Exercice 4 : Plaque de cuisson à induction

[◆◆◆]

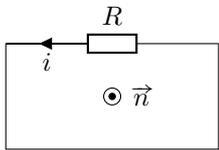
Le chauffage du fond métallique des casseroles et autres poêles de cuisson peut être réalisé par effet Joule des courants induits directement dans le fond de la casserole par un champ magnétique variable, les courants de Foucault.

Logé dans une table support en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal, appelé inducteur, génère ce champ. L'inducteur a un rayon de 5 cm et compte vingt spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 18 \text{ m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_1 = 30 \text{ }\mu\text{H}$. Il est alimenté par une tension harmonique v_1 de pulsation ω . Du point de vue électromagnétique, on modélise le fond de casserole par une spire circulaire unique, fermée sur elle-même, appelée induit. L'induit a une résistance $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$ et une auto-inductance $L_2 = 0,24 \text{ }\mu\text{H}$. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit d'inductance mutuelle $M = 2 \text{ }\mu\text{H}$.

- 1 - En s'appuyant sur un schéma électrique équivalent, établir les équations électriques relatives aux deux circuits.
- 2 - En déduire l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{I}_2 / \underline{I}_1$.
- 3 - En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \underline{V}_1 / \underline{I}_1$ du système.
- 4 - La pulsation ω est choisie bien plus grande que R_1/L_1 et R_2/L_2 . Simplifier les deux expressions précédentes et calculer numériquement leur module.
- 5 - On soulève la casserole. Indiquer qualitativement comment varie l'amplitude du courant appelé par l'inducteur.

Exercice 5 : Peut-on négliger l'auto-induction ?

[◆◆◆]



Comme indiqué en cours, on fait très souvent l'approximation de négliger l'auto-induction dans les circuits ne comportant aucun bobinage. On s'intéresse dans cet exercice à la validité de cette approximation pour un circuit a priori quelconque schématisé ci-contre, d'auto-inductance L . Le schéma ne préjuge pas de la présence ou non de bobinages. Le circuit, de surface totale S et de résistance R , est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos \omega t \vec{n}$.

- 1 - Commençons par ne prendre en compte que la f.é.m. induite par le champ \vec{B}_{ext} . Calculer son flux au travers du circuit, et en déduire le schéma électrique équivalent. Que vaut l'intensité i ?
- 2 - Considérons en plus le phénomène d'auto-induction. Exprimer le flux magnétique au travers du circuit et représenter le schéma électrique équivalent. Établir l'équation différentielle vérifiée par i .
- 3 - Passons maintenant en notation complexe. Exprimer le rapport $|\underline{H}| = |\underline{E}_L| / |\underline{E}_{\text{ext}}|$ des amplitudes de la f.é.m. auto-induite et de la f.é.m. induite par le champ extérieur. En déduire à quelle condition sur la pulsation la f.é.m. auto-induite est négligeable.
- 4 - Pour fixer les idées, calculer numériquement la pulsation et la fréquence caractéristiques avec des valeurs de R et L utilisées habituellement en TP d'électronique. Quel résultat connu retrouve-t-on ?
- 5 - En proposant des ordres de grandeur raisonnables, refaire le même calcul pour un circuit de même résistance mais à une seule « spire » composée d'un fil de cuivre de TP. L'inductance d'un circuit circulaire de diamètre D est donnée par

$$L = \mu_0 \frac{D}{2} \left(\ln \frac{8D}{d} - 2 \right)$$

où d est le diamètre du fil de cuivre. Est-il légitime de négliger l'inductance du circuit ?

Exercice 6 : Solénoïdes imbriqués

[oral CCP, ♦♦♦]

Deux solénoïdes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de même axe (Oz) , de même longueur ℓ et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre, voir figure 1. Ils présentent tous deux le même nombre de spires N . On suppose que la longueur ℓ est très supérieure aux rayons.

La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I \cos(\omega t)$, avec $I = 1$ A. La bobine extérieure est en court-circuit.

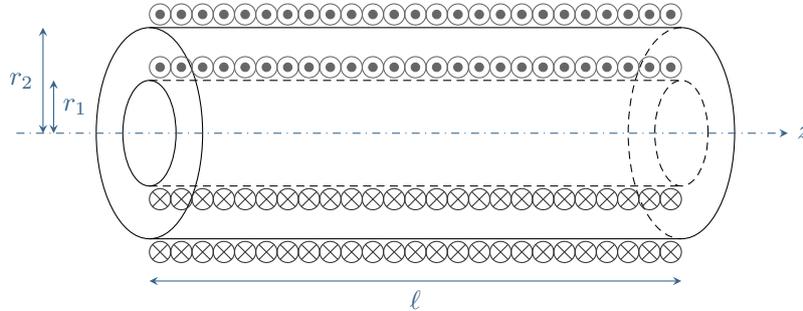
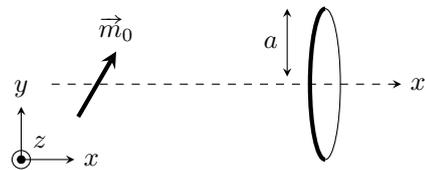


Figure 1 – Solénoïdes imbriqués.

- 1 - Déterminer les coefficients d'induction propre L_1, L_2 , et le coefficient d'induction mutuelle M .
- 2 - En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_2(t)$ parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?
- 3 - Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

Exercice 7 : Principe de fonctionnement d'un générateur synchrone

[oral CCP, ♦♦♦]



Un aimant de moment magnétique \vec{m}_0 est placé dans le plan (Oxy) . Un système mécanique le met en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) . Une spire circulaire de rayon a et de résistance R est placée sur l'axe (Ox) à distance $x \gg a$.

Donnée : en coordonnées polaires d'axe colinéaire à \vec{m} , un moment magnétique \vec{m} placé à l'origine crée en un point M quelconque un champ magnétique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

- 1 - Déterminer l'intensité i du courant induit dans la spire. En déduire la puissance électrique qu'elle reçoit.
- 2 - Exprimer le couple magnétique subi par l'aimant
- 3 - Quel puissance le système mécanique doit-il fournir à l'aimant pour maintenir la vitesse constante ? Conclure : en quoi a-t-on modélisé un générateur électrique rudimentaire ?

Corrigé

Exercices

Exercice 1 : Signe du courant induit

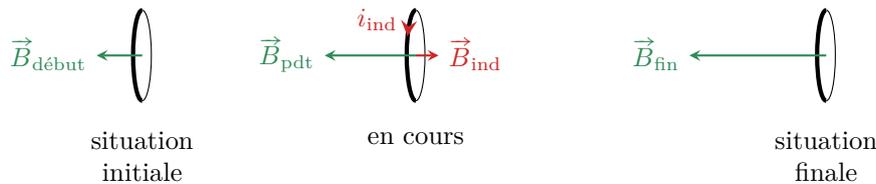
Rappelons que pour un aimant droit, le champ sort par le Nord : les lignes de champ sont orientées du Nord vers le Sud.

La première étape consiste à déterminer le sens de variation du champ magnétique vu par la spire au cours du déplacement. On déduit alors de la loi de Lenz le sens du champ magnétique induit \vec{B}_{ind} , qui tend à atténuer les variations de \vec{B} . On détermine ensuite par la règle de la main droite le sens réel du courant dans la spire. Enfin, par comparaison entre le sens réel du courant et le sens $i > 0$ indiqué sur la figure on en déduit le signe de i .

*Attention à ne pas faire de confusion : ce sont les **variations** de champ **pendant le déplacement** qui comptent, pas le sens de ce champ. Le champ induit peut indifféremment renforcer ou atténuer le champ extérieur, tout dépend des variations.*

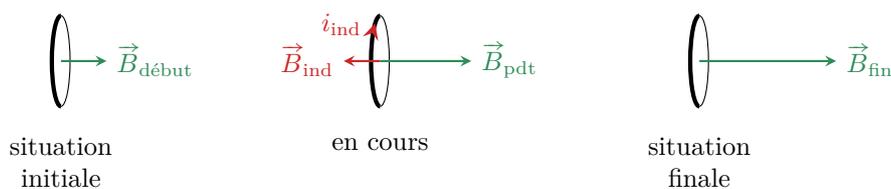
*Attention également, le champ et le courant induits n'existent dans la spire que **pendant** le déplacement relatif de l'aimant et de la spire.*

- 1 Le sens réel du courant indiqué sur le schéma central est celui de la flèche indiquant le sens positif, donc $i_{\text{ind}} > 0$.



- 2 La physique est identique à la situation précédente, seule change la convention sur le sens positif du courant : on déduit immédiatement $i < 0$.

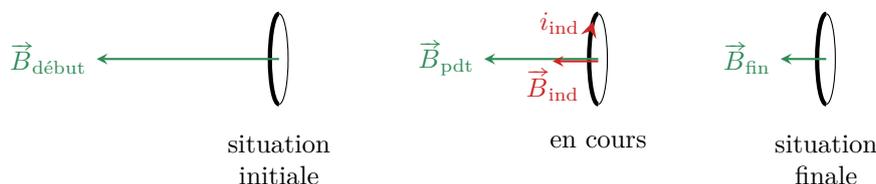
- 3 Le sens réel du courant est opposé au sens positif, donc $i_{\text{ind}} < 0$.



- 4 Les variations de champ vues par la spire sont les mêmes qu'à la question 1, le sens réel du courant induit est donc le même ... mais comme le sens choisi positif du courant est opposé, alors $i_{\text{ind}} < 0$.

- 5 Comme la spire et l'aimant se déplacent de la même façon, le flux magnétique au travers de la spire ne varie pas pendant l'expérience. Il n'y a donc aucun courant induit : $i_{\text{ind}} = 0$.

- 6 Le déplacement de la spire renforce l'effet du déplacement de l'aimant. Cette fois, le champ vu par la spire diminue au cours du mouvement, le champ induit a donc tendance à le renforcer. On a donc $i_{\text{ind}} < 0$.



Exercice 2 : Spire en rotation

Notons \vec{n} le vecteur normal à la spire, défini tel que $\theta = \pi/2$ lorsque \vec{n} et \vec{B} sont colinéaires et de même sens. Le sens positif de la spire est alors défini à partir de ce vecteur \vec{n} . On choisit l'origine du temps $t = 0$ lorsque $\theta = 0$: la loi horaire $\theta(t)$ s'écrit donc tout simplement $\theta = \Omega t$.

1 Comme le champ magnétique est uniforme à l'échelle de la spire, on en déduit son flux au travers de la spire

$$\phi(t) = S \vec{B} \cdot \vec{n} = S B \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = S B \sin \theta = S B \sin \Omega t.$$

La f.é.m. induite dans la spire e se déduit de la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\Omega S B \cos \Omega t \quad \text{soit} \quad \boxed{e(t) = -\Omega S B \cos \Omega t.}$$

Le signe de la f.é.m dépend du temps car le vecteur normal \vec{n} est d'orientation fixée, donc le flux change de signe.

Le courant induit dans la spire, orienté dans le sens de e , vaut simplement

$$i = \frac{e}{r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{i(t) = -\frac{\Omega S B}{r} \cos \Omega t.}$$

2 Le moment magnétique instantané de la spire vaut

$$\vec{m}(t) = i(t) S \vec{n} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{m}(t) = -\frac{\Omega S^2 B}{r} \cos \Omega t \vec{n}.}$$

3 Le couple de Laplace qui s'exerce sur la spire est

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = \left[-\frac{\Omega S^2 B}{r} \cos \Omega t \times B \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right] \vec{e}_\Delta = -\frac{\Omega S^2 B^2}{r} \cos \Omega t \cos(\theta) \vec{e}_\Delta$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\vec{\Gamma}(t) = -\frac{\Omega S^2 B^2}{r} \cos^2 \Omega t \vec{e}_\Delta \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Gamma} \rangle = -\frac{\Omega S^2 B^2}{2r} \vec{e}_\Delta.}$$

La composante sur Δ de ce couple est toujours négative, c'est-à-dire qu'il **tend à freiner la spire** dans son mouvement (dans le sens positif) autour de Δ . Ce résultat aurait pu se prévoir car ce couple résulte de phénomènes d'induction, générés par le mouvement de la spire autour de l'axe. On sait donc d'après la loi de modération de Lenz qu'il a pour effet de s'opposer à ce mouvement, et donc de vouloir freiner la spire.

Exercice 3 : Mesure d'une inductance mutuelle

1 Comme l'oscilloscope est idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en circuit ouvert, **le courant la traversant est donc nul** : $\forall t, i_2(t) = 0$. D'après la loi de comportement, on aurait

$$\boxed{u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \dots \text{ ce qui est faux!}}$$

La loi de comportement de la bobine n'est pas applicable ici car elle est établie en ne tenant compte *que* de l'auto-induction, cf. cours, alors qu'ici **il faut également prendre en compte l'induction mutuelle** entre les deux bobines L_1 et L_2 .

2 On peut raisonner ou bien sur le schéma de l'énoncé en se méfiant de la tension aux bornes de la bobine, ou bien sur le schéma électrique équivalent de la figure 2, qui fait directement apparaître des générateurs induits qui traduisent **à la fois** l'induction propre et mutuelle. En tout cas, il vaut mieux éviter de mélanger les deux.

En vertu de la loi de Faraday et comme $i_2 = 0$, le double effet de l'auto-induction et de l'induction mutuelle est représenté par les générateurs de f.é.m.

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

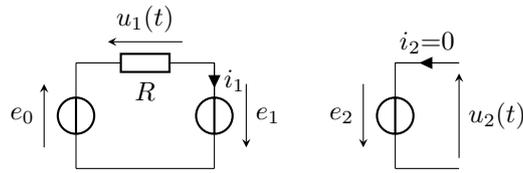


Figure 2 – Schéma électrique équivalent au dispositif de mesure d'inductance mutuelle.

Par application de la loi des mailles au circuit 2,

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}}$$

3 Traduisons la relation précédente en représentation complexe :

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1$$

Comme $U_{1,2} = |\underline{U}_{1,2}|$ alors

$$U_2 = \omega \frac{M}{R} U_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{M = \frac{R U_2}{2\pi f U_1} = 1,3 \text{ mH}}$$

4 ▷ Lorsque la bobine 2 est tournée de 180°, elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors $u'_2 = -u_2$, et le même calcul que précédemment montre que la valeur de **M est inchangée**.

En toute rigueur, M change de signe, mais le signe d'une inductance mutuelle dépend des orientations des courants, donc de conventions, et n'a donc pas vraiment de pertinence physique.

▷ Lorsque la bobine est tournée de 90°, beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2, si bien que le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est nettement diminué à courant i_1 fixé, ce qui veut dire que **M est plus faible**.

▷ Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2, donc le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est plus élevé à courant i_1 fixé, donc **M est plus grande**.

Exercice 4 : Plaque de cuisson à induction

1 **Attention !** Dès lors qu'il y a auto-induction (et champ extérieur de façon générale), la loi de comportement habituelle de la bobine ne s'applique plus. La tension à ses bornes se détermine à partir de la loi de Faraday.

Un schéma de principe et un schéma électrique équivalent faisant apparaître des générateurs induits sont représentés figure 3. On peut raisonner indifféremment sur l'un ou sur l'autre, à condition de se méfier de la loi de comportement de la bobine si on choisit le schéma de gauche, et de ne pas oublier l'auto-induction si on choisit le schéma de droite.

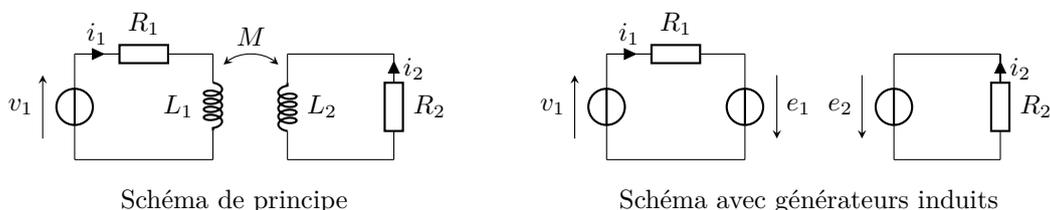


Figure 3 – Schéma équivalents à une plaque à induction. Il est possible de raisonner directement sur le schéma de principe ... mais attention à la loi de comportement de la bobine. Une autre représentation possible fait intervenir directement des générateurs induits ... mais attention à ne pas oublier l'auto-induction.

Les deux générateurs de f.é.m. e_1 et e_2 orientées dans le même sens que les courants traduisent l'effet de l'induction dans les circuits. Par définition, on a

$$\phi_{\rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{d'où} \quad e_1 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 1}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

et de même

$$\phi_{\rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 \quad \text{d'où} \quad e_2 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 2}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Par application de la loi des mailles, on en déduit

$$v_1 + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_2 = R_2 i_2$$

soit

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2 Traduisons l'équation de fonctionnement de l'induit (circuit 2) en complexes,

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1,$$

ce qui conduit à

$$\underline{H} = -\frac{jM\omega}{R_2 + j\omega L_2}$$

3 D'après l'équation de fonctionnement de l'inducteur,

$$\underline{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + jM\omega \underline{H} \quad \text{soit} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + j\omega L_2}.$$

4 Dans l'hypothèse très haute fréquence, les expressions se simplifient en

$$\underline{H} = -\frac{M}{L_2} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_e = jL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$$

Numériquement,

$$\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = 8,3 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_e| = 2,1 \Omega.$$

On remarque que la qualité du couplage inductif apparaît dans l'expression de \underline{Z}_e : si le couplage est parfait, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, alors l'impédance d'entrée du système est nulle, signe d'une transmission parfaite de l'énergie électromagnétique. On retrouve exactement le même résultat à propos du transformateur.

Remarquons aussi que la différence de nombre de spires dans l'inducteur et l'induit permet au courant à l'induit d'être nettement supérieur au courant à l'inducteur, et donc de fournir davantage d'effet Joule dans le fond de la casserole.

5 Qualitativement, si l'on éloigne la casserole le couplage sera moins bon (M diminue) et donc **l'impédance d'entrée augmente**. Plus précisément, comme la casserole est éloignée de l'inducteur qui est source de champ magnétique, le flux vu par l'induit diminue combien même le courant dans l'inducteur serait imposé, ce qui indique que M diminue. Si l'impédance d'entrée augmente alors que la tension d'alimentation v_1 ne change pas, alors la définition de \underline{Z}_e montre que **l'inducteur appelle moins de courant**.

Exercice 5 : Peut-on négliger l'auto-induction ?

1 Compte tenu du sens de i sur le schéma, le vecteur normal orienté est le vecteur $+\vec{n}$. Ainsi,

$$\phi_{\text{ext}} = S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} = S B_0 \cos(\omega t).$$

Sur le schéma électrique, figure 4, la f.é.m. induite e_{ext} est orientée *dans le même sens* que l'intensité et vaut

$$e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = +S B_0 \omega \sin(\omega t),$$

d'où on déduit l'intensité induite par le champ extérieur $i_{\text{ext}} = e_{\text{ext}}/R$ de la loi d'Ohm,

$$i_{\text{ext}} = \frac{S B_0 \omega}{R} \sin(\omega t).$$

2 En tenant compte de l'auto-induction,

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + Li \quad \text{donc} \quad \phi = S B_0 \cos(\omega t) + Li.$$



Figure 4 – Schémas électriques équivalents.

Il n'est pas possible de remplacer i par l'expression obtenue à la question précédente : cette expression est valable lorsque seul le champ extérieur est pris en compte, alors qu'on s'intéresse désormais en plus à l'auto-induction.

Le schéma électrique équivalent est représenté figure 4. La f.é.m. induite tient compte des deux contributions au flux et vaut

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = S B_0 \omega \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt}$$

D'après la loi des mailles, $e = Ri$, d'où on déduit

$$L \frac{di}{dt} + Ri = S B_0 \omega \sin(\omega t).$$

3 À partir des raisonnements précédents, on identifie

$$e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{E}_{\text{ext}} = j\omega S B_0$$

et de même

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{E}_L = -j\omega L \underline{I},$$

d'où on trouve

$$\underline{H} = \frac{-j\omega L \underline{I}}{j\omega S B_0} = \frac{L}{S B_0} \underline{I}$$

Or d'après l'équation différentielle obtenue à la question précédente,

$$j\omega L \underline{I} + R \underline{I} = j\omega S B_0 \quad \text{soit} \quad \underline{I} = \frac{j\omega S B_0}{R + jL\omega}.$$

L'expression finale est donc

$$\underline{H} = \frac{L}{S B_0} \frac{j\omega S B_0}{R + jL\omega} \quad \text{d'où} \quad |\underline{H}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}.$$

La force électromotrice auto-induite dès lors que $|\underline{H}| \ll 1$, c'est-à-dire lorsque $R/L\omega \gg 1$ soit

$$\omega \ll \frac{R}{L}$$

Pour reprendre des termes plus familiers en électrocinétique, on vient d'établir que la f.é.m. auto-induite de la bobine était négligeable en régime très basse fréquence ... là même où l'on affirmait cet automne qu'elle était équivalente à un fil, c'est-à-dire que son comportement « bobine » n'apparaissait pas. Comme le comportement « bobine » est justement de l'auto-induction ... la boucle est bouclée!

4 Pour $L = 100 \text{ mH}$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$, l'auto-induction est négligeable dans la limite

$$\omega \ll 1 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 1,6 \text{ kHz}.$$

5 Considérons par exemple $d \sim 1 \text{ mm}$ et $D \sim 1 \text{ m}$. On trouve alors $L \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ H}$, ce qui donne comme condition

$$\omega \ll 2 \cdot 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}.$$

Pour toutes les fréquences usuelles en électronique, limitées au plus à $1 \cdot 10^7 \text{ Hz}$, **négliger l'auto-induction du circuit est donc légitime.**

Exercice 6 : Solénoïdes imbriqués

[oral CCP]

1 Par hypothèse, $L \gg r_1$ et r_2 , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant i_1 et i_2 les courant qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z.$$

Inductance propre L_1 :

▷ Flux créé par \mathcal{S}_1 au travers d'une spire s_1 de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par \mathcal{S}_1 au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1.$$

▷ Inductance propre : par définition, $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$ donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

Inductance propre L_2 : par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

Inductance mutuelle M : comme le champ créé par \mathcal{S}_2 est uniforme à l'intérieur de \mathcal{S}_1 alors que la réciproque n'est pas vrai, il est plus simple de calculer M à partir du flux créé par \mathcal{S}_2 au travers de \mathcal{S}_1 .

▷ Flux créé par \mathcal{S}_2 au travers d'une spire s_1 de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par \mathcal{S}_2 au travers de \mathcal{S}_1 :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2.$$

▷ Inductance mutuelle : par définition, $\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = M i_2$ donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

2 Le circuit équivalent est tracé figure 5. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant i_1 , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a un couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

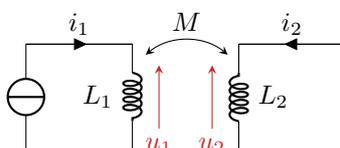


Figure 5 – Circuit électrique équivalent.

D'après la loi des mailles, $u_2 = 0$ donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L} i_1 + \text{cte.}$$

Comme le solénoïde S_2 n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L} I.$$

3 D'après le principe de superposition, en un point M se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left(1 - \frac{M}{L}\right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

Exercice 7 : Principe de fonctionnement d'un générateur synchrone

[oral CCP]

1 Comme la distance entre la spire et l'aimant est bien plus grande que le rayon de la spire, on peut considérer le champ magnétique généré par l'aimant uniforme et vaut

$$\vec{B}_a(\theta) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

en étant très vigilant à la définition de l'angle θ servant à repérer la position de la spire, voir figure 6.

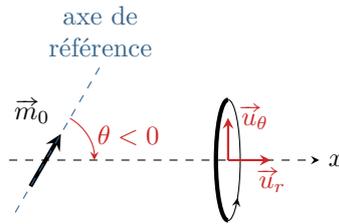


Figure 6 – Orientation relative de la spire par rapport à l'aimant. Comme dans l'expression du champ magnétique donné par l'énoncé, les coordonnées utilisées sont les coordonnées polaires de centre O et d'axe l'axe de l'aimant.

Compte tenu de l'orientation de la spire, spécifiée sur le schéma, le flux du champ magnétique au travers de la spire vaut

$$\phi = S \vec{B}_a \cdot \vec{u}_r = \pi a^2 \times \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} \times 2 \cos \theta = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \cos \theta$$

et on en déduit la force électromotrice induite dans la spire

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} (-\dot{\theta} \sin \theta)$$

Si l'aimant tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe z , alors compte tenu du schéma on a $\theta = -\omega t$ (en supposant $\theta = 0$ à $t = 0$), donc $\dot{\theta} = -\omega$, et alors

$$e = +\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \omega \sin \omega t$$

Faites très attention aux multiples signes et compensations de signe ! Et vérifiez qualitativement le signe final : pour $t = 0$ l'aimant est dans l'axe de la spire, donc à $t \gtrsim 0$ il s'en éloigne, donc le flux au travers de la spire diminue, donc d'après la loi de Faraday $e > 0$. Ouf, c'est ce qu'on vient de trouver.

Le courant induit se détermine alors directement à partir de la loi d'Ohm, $i = e/R$, d'où

$$i = \frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2 x^3 R} \sin \omega t .$$

La spire étant simplement résistive, elle ne peut stocker d'énergie, et toute la puissance qu'elle reçoit est dissipée par effet Joule. Ainsi, la puissance électrique reçue par la spire $\mathcal{P}_e = Ri^2$ vaut

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2 x^3} \right)^2 \sin^2 \omega t .$$

2 Le champ créé par l'aimant n'exerce pas de couple sur l'aimant lui-même. On en déduit que le champ à l'origine de ce couple est donc le champ magnétique induit par la spire. L'énoncé donne le champ créé par un moment magnétique : il faut donc calculer le moment magnétique de la spire pour en déduire le champ qu'elle crée, en étant particulièrement vigilant au repérage. Compte tenu de l'orientation du courant sur la figure 6, le moment magnétique de la spire vaut

$$\vec{m}_{\text{sp}} = i \pi a^2 \vec{u}_x = \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2 x^3 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

En coordonnées polaires d'axe \vec{u}_x et d'origine le centre de la spire (et donc pas $O!$), l'aimant a pour coordonnées $r = x$ et $\theta = \pi$, si bien que $\vec{u}_r = -\vec{u}_x$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_y$. On en déduit que le champ magnétique créé en O au niveau de l'aimant par la spire vaut

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0 m_{\text{sp}}}{4\pi x^3} [2 \cos \pi (-\vec{u}_x) + \sin \pi (-\vec{u}_y)]$$

soit

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3} \times \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2 x^3 R} \sin \omega t \times 2 \vec{u}_x$$

et ainsi

$$\vec{B}_{\text{sp}}(O) = \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4 x^6 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

Encore une fois, pensez à vérifier qualitativement les signes ! En connaissant le sens du courant induit d'après la question précédente ($i > 0$ pour $t \gtrsim 0$), on déduit de la règle de la main droite que \vec{B}_{sp} doit être porté par $+\vec{u}_x$. Compte tenu du fait que les calculs ne sont pas très sympatiques, ces vérifications qualitatives font vraiment partie des compétences testées à l'oral du concours.

Finalement, le couple magnétique exercé par la spire sur l'aimant vaut

$$\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_{\text{sp}}(O)$$

Le plus sûr pour calculer le produit vectoriel est de décomposer les coordonnées de \vec{m}_0 sur la base \vec{u}_x, \vec{u}_y . Comme l'aimant tourne à vitesse angulaire ω (supposée) positive autour de \vec{u}_z , alors

$$\vec{\Gamma} = m_0 [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y] \wedge \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4 x^6 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

ce qui conduit à

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega}{4 x^6 R} \sin^2 \omega t \vec{u}_z$$

On vérifie encore et toujours le signe : le couple est porté par $-\vec{u}_z$, c'est-à-dire qu'il résiste au mouvement de l'aimant. D'après la loi de Lenz, c'est complètement normal, puisque ce couple est d'origine inductive ... et que la cause de ce phénomène d'induction est le mouvement de l'aimant.

3 Pour maintenir la vitesse de rotation de l'aimant constante, le système mécanique doit fournir à l'aimant sous forme d'un couple une puissance exactement opposée à la puissance dissipée par $\vec{\Gamma}$. La puissance mécanique à fournir vaut donc $\mathcal{P}_m = -\Gamma\omega$, d'où

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega^2}{4 x^6 R} \sin^2 \omega t .$$

On remarque qu'on a $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_e$, c'est-à-dire que **toute la puissance mécanique fournie à l'aimant est transmise à la spire sous forme de puissance électrique** : on a bien modélisé un générateur électrique simplifié.