DM Forces centrales – corrigé

1 Diffusion de Rutherford

1 Plaçons-nous en coordonnées cylindriques d'axe Oz. La particule α étant chargée positivement, elle subit une force de Coulomb répulsive exercée par le noyau placé en O s'écrivant

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha\, q_{\text{noy}}}{r^2}\,\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\,\vec{e}_r$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$\boxed{\vec{F} = \frac{K}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\,.}$$

Si cette force est conservative, alors comme elle est dirigée suivant $\vec{e}_r$ et qu'elle ne dépend que de r elle s'écrit sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r$$

ce qui permet d'identifier

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}$$

et en intégrant avec une constante d'intégration choisie nulle ($E_\mathrm{p}(r\to\infty) = 0$),

$$\boxed{E_\mathrm{p}(r) = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0\, r} = \frac{K}{r}\,.}$$

2 Le poids de la particule α est négligeable devant la force de Coulomb exercée par le noyau. On peut donc considérer qu'elle n'est soumise qu'à cette force, qui dérive d'une énergie potentielle. On en déduit que le mouvement de la particule α est conservatif, donc **E_m est une constante du mouvement**. À l'instant initial, la particule est à l'infini où $E_\mathrm{p} = 0$ et elle est animée d'une vitesse initiale de norme v_0, d'où

$$\boxed{E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2\,.}$$

3 Appliquons la loi du moment cinétique à la particule α. Comme la force de Coulomb est dirigée selon $\vec{e}_r$ alors sa droite d'action passe par O et donc son moment en O est nul. Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

donc le moment cinétique évalué en O de la particule α est une constante du mouvement. Calculons-le à partir des conditions initiales. En utilisant les notations de la figure de l'énoncé,

$$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_\infty} = OH\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y\,.$$

Ainsi, à l'instant initial,

$$\vec{L}_O(0) = m(OH\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y)\wedge(-v_0\,\vec{e}_x) = -m\,b\,v_0(\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{L}_O = m\,b\,v_0\,\vec{e}_z\,.}$$

Enfin, exprimons $\overrightarrow{L}_O$ en coordonnées polaires,

$$\overrightarrow{L}_O = m(r\,\overrightarrow{e}_r) \wedge (\dot{r}\,\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e}_\theta) = m\,r^2\,\dot{\theta}(\overrightarrow{e}_r \wedge \overrightarrow{e}_\theta) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overrightarrow{L}_O = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e}_z\,.}$$

4 À un instant quelconque, l'énergie mécanique de la particule α s'écrit sous la forme

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$$

Pour l'écrire comme une fonction de r seulement, il faut remplacer la dépendance en $\dot{\theta}$ par une dépendance en r, ce qui est rendu possible grâce au moment cinétique,

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e}_z = m\,b\,v_0\,\overrightarrow{e}_z\,,}$$

ce qui permet d'isoler

$$\dot{\theta} = \frac{bv_0}{r^2}$$

et d'écrire ainsi

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{b^2{v_0}^2}{r^4} + \frac{K}{r}\,,$$

ce qui se met sous la forme demandée

$$\boxed{E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\mathrm{p}^\star(r) \qquad \text{avec} \qquad E_\mathrm{p}^\star(r) = \frac{m\,b^2\,{v_0}^2}{2r^2} + \frac{K}{r}\,.}$$

Cette fonction $E_\mathrm{p}^\star(r)$ est **l'énergie potentielle effective** de la particule α.

5 Lorsque la particule passe en S, sa distance à O est par définition minimale et donc $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique est donc tout simplement égale à $E_\mathrm{p}^\star(r_\mathrm{min})$,

$$\boxed{E_\mathrm{m} = \frac{m\,b^2 {v_0}^2}{2r_\mathrm{min}^2} + \frac{K}{r_\mathrm{min}}\,.}$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 = \frac{m\,b^2\,{v_0}^2}{2r_\mathrm{min}^2} + \frac{K}{r_\mathrm{min}}$$

Pour isoler r_min, le plus naturel consiste à multiplier l'équation par r_min^2,

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2\,r_\mathrm{min}^2 = \frac{1}{2}\,m\,b^2 {v_0}^2 + K r_\mathrm{min}$$

ce qui conduit à une équation du second degré

$$r_\mathrm{min}^2 - \frac{2K}{m{v_0}^2} r_\mathrm{min} - b^2 = 0\,.$$

Cette équation a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{2K}{m{v_0}^2}\right)^2 + 4b^2 > 0$$

et pour solutions

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{m{v_0}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{m{v_0}^2}\right)^2 + 4b^2}\right)\,.$$

Comme un rayon de coordonnées polaires est par définition positif, seule la solution avec un signe + a un sens physique, d'où on déduit

$$\begin{aligned} r_\mathrm{min} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{m{v_0}^2} + \sqrt{\left(\frac{2K}{m{v_0}^2}\right)^2 + 4b^2}\right) \\ &= \frac{K}{m{v_0}^2}\left[1 + \sqrt{1 + 4b^2\left(\frac{m{v_0}^2}{2K}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{r_\mathrm{min} = \frac{K}{m{v_0}^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b\,m\,{v_0}^2}{K}\right)^2}\right]}$$

6 En inversant la relation donnée, on trouve

$$b = \frac{K}{m{v_0}^2\tan(D/2)} = \frac{Ze^2}{2\pi\,\varepsilon_0\,m\,{v_0}^2\tan(D/2)}$$

d'où $b_1 = 2{,}4\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ et $b_2 = 0$, ce qui donne alors $r_\mathrm{min1} = 2{,}4\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ et $r_\mathrm{min2} = 2{,}7\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$. On en déduit qu'**un noyau d'or a une taille de l'ordre de 10^{-14} m** (c'est un assez gros noyau), ce qui est bien plus petit que la taille de l'atome ($10^{-10}\,\mathrm{m}$) connue par Rutherford.

2 Modèle de Bohr

1 Le proton exerce une force de Coulomb attractive sur l'électron. Dans un repérage polaire dans le plan du mouvement,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r\,.}$$

Comme cette force est conservative, alors l'énergie potentielle dont elle dérive est telle que

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$$

ce qui conduit à

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

en prenant comme référence $E_\mathrm{p}(r\to\infty) = 0$.

2 L'électron en mouvement par rapport à un référentiel lié au proton. Son poids est négligeable devant la force électrique exercée par le proton, ce qui a été justifié dans le chapitre sur les particules chargées. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron en mouvement circulaire,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur $\vec{u}_r$

$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,.$$

Or $\dot{\theta}^2 = v^2/r^2$, d'où

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,r}}\,.}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r} - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3 D'après la question précédente,

$$E_\mathrm{p} = 2E_\mathrm{m}\,.$$

> *Comme $E_\mathrm{m} < 0$ il n'y a pas de contradiction !*

4 Comme l'orbite de l'électron est circulaire, son vecteur vitesse est orthoradial alors que son vecteur position est radial. Les deux vecteurs sont donc perpendiculaires. La norme du moment cinétique de l'électron évalué en P vaut donc

$$L_P = r_n \times mv_n \times \sin\frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L_P = \sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}}\,.}$$

5 L'hypothèse de quantification de Bohr indique que

$$\sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}} = n\hbar \qquad \text{soit} \qquad \frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$$

et ainsi

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2}\,n^2\,.}$$

6 Connaissant r_n, on en déduit les valeurs permises pour l'énergie mécanique,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{m\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2\,n^2} \qquad \text{soit} \qquad E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{E_0 = \frac{m\,e^4}{32\pi^2{\varepsilon_0}^2\hbar^2} = 13{,}6\,\text{eV}}$$

7 Repartons de la condition de quantification du moment cinétique,

$$L_P = m\,r_n\,v_n = n\hbar\,.$$

En utilisant la relation de de Bröglie, $v_n = h/m\lambda_n$,

$$m\,r_n\,\frac{h}{m\lambda_n} = n\hbar$$

d'où le résultat annoncé,

$$\boxed{2\pi\,r_n = n\lambda_n\,.}$$

La longueur $2\pi r_n$ correspond au périmètre de l'orbite circulaire, qui doit ici correspondre à un nombre entier de longueurs d'ondes de de Bröglie : c'est une condition de type **résonance d'onde stationnaires**.