

DS n°5 – Durée 2 heures

1 Tournez manèges – 35 pts

1.1 Disque tournant – 8 pts

1. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. **1 pt**
2. Cf. cours $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r$ **2 pts**
3. Schéma **2 pts**
4. On a $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{R}_t$. On projette selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$ et on obtient : $-mR\omega^2 = -R_t$ et $R_n = mg$
soit $R\omega^2 \leq fg$ et donc $\omega \leq \omega_\ell = \sqrt{\frac{fg}{R}}$ **3 pts**

1.2 Cylindre tournant – 7 pts

1. Schéma **2 pts**
2. On écrit le PFD comme avant : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{R}_t$ et on projette selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$: il vient $-mR\omega^2 = -R_n$ et $0 = R_t - mg$ soit $R_t = mg \leq fR_n = fR\omega^2$
soit $g \leq fR\omega^2$ et donc $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{fR}} = \omega_\ell$ **3 pts**
3. Application numérique : $\omega_\ell = 1,6$ rad/s soit 16 tours/min **2 pts**

1.3 Cône tournant – 21 pts

1. Schéma **2 pts**
2. En projetant le principe fondamental de la dynamique on obtient

$$mR\omega^2 = R_n \cos \alpha - R_t \sin \alpha \text{ et } mg = R_n \sin \alpha + R_t \cos \alpha$$

4 pts

3. En multipliant la première égalité par $\cos \alpha$ et la deuxième par $\sin \alpha$ et en les sommant on arrive à $R_n = m(R\omega^2 \cos \alpha + g \sin \alpha)$. On fait de même en multipliant la première par $-\sin \alpha$ et la deuxième par $\cos \alpha$ et en sommant, on arrive à $R_t = m(g \cos \alpha - R\omega^2 \sin \alpha)$. **2 pts**
4. On utilise la loi de Coulomb $R_t \leq fR_n$ ce qui conduit à $(g \cos \alpha - R\omega^2 \sin \alpha) \leq (R\omega^2 \cos \alpha + g \sin \alpha)$
soit encore $\omega \geq \omega_1 = \sqrt{\frac{g(\cos \alpha - f \sin \alpha)}{R(f \cos \alpha + \sin \alpha)}}$

Ceci correspond au cas du cylindre ($\alpha = 0$ et on retrouve bien $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{fR}}$) **2 + 1 + 1 pts**

5. Si le cône tourne trop vite, la masse M va être éjectée et va monter sur le cône (comme dans le cas du disque). **1 pt**
6. $\vec{R}_t$ va être vers le bas si le disque tourne trop vite. On reprend alors le PFD de la question 1. et il vient

$$mR\omega^2 = R_n \cos \alpha + R_t \sin \alpha \text{ et } mg = R_n \sin \alpha - R_t \cos \alpha$$

2 pts soit en multipliant la première égalité par $\cos \alpha$ et la deuxième par $\sin \alpha$ et en les sommant on arrive à $R_n = m(R\omega^2 \cos \alpha + g \sin \alpha)$. On fait de même en multipliant la première par $\sin \alpha$ et la

deuxième par $-\cos \alpha$ et en sommant, on arrive à $R_t = (mR\omega^2 \sin \alpha - mg \cos \alpha)$. **2 pts**

En appliquant la loi de Coulomb, on arrive à

$$\sqrt{\frac{g}{R} \left(\frac{f \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha} \right)}$$

2 pts

Ceci correspond au cas du disque ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ et on retrouve bien $\omega \leq \sqrt{\frac{fg}{R}}$) **1 + 1 pts**

2 Sortie de route – 10 pts.

On considère :

- que le véhicule se déplace en ligne droite et glisse sur le sol (trace des pneus sur le sol) durant la phase de freinage ;
- qu'il n'est soumis selon la direction du mouvement qu'à la force due aux freins. En pratique cela revient à supposer que la force due à l'écoulement de l'air est négligeable devant l'action des freins. Cela semble très raisonnable car la voiture s'arrête sur la photo en quelques dizaines de mètres, la distance parcourue serait considérablement plus grande si l'on se contentait de relâcher l'accélérateur sans freiner.

Pour ce problème à une inconnue pour lequel on ne demande pas les lois horaires, une analyse énergétique est à privilégier.

Mise en équations :

En l'absence de déplacement vertical, le poids du véhicule et la réaction du support se compensent : $N = mg$

La loi de Coulomb appliquée au glissement conduit pour la norme de la force de freinage à : $T = f \times mg$

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique alors le théorème de l'énergie cinétique au véhicule sur la phase de freinage de distance L en appelant v_i la vitesse initiale :

$$\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = -\frac{1}{2}mv_i^2 = -T \times L = -f \times mg \times L$$

C'est à dire : $v_i = \sqrt{2fgL}$

Application numérique :

On peut considérer que la distance parcourue correspond, sur l'accotement gauche de la route, à environ 5 bandes blanches et demi et 6 espacements, c'est à dire une distance $L \approx 35$ m.

$$v_i = \sqrt{2 \times 0,8 \times 10 \times 35} \approx 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est à dire une vitesse de l'ordre de 80 à 90 km/h

Analyse du résultat :

La vitesse est indicative mais le véhicule ne semble pas en excès de vitesse manifeste sur cette route sans doute limitée à 90 km/h. Le freinage non maîtrisé est certainement dû à la présence d'un obstacle imprévu lors de la phase de dépassement.

3 Système élastique et énergies – 24 pts.

1. On calcule le travail élémentaire du poids :

$$\delta W(\vec{P}) = -mg \sin \theta \vec{e}_\theta \cdot R d\theta \vec{e}_\theta = d(mgR \cos \theta) = -dE_p$$

donc

$$E_p = -mgR \cos \theta + \underbrace{cste}_{=0}$$

2 + 1 pts

2. $E_p^{\text{elas}} = \frac{1}{2}k(\ell - R)^2$ avec $\ell = 2R \cos \frac{\theta}{2}$ (raisonner sur le triangle isocèle OAM d'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ en O...).
D'où :

$$E_p^{\text{elas}} = \frac{1}{2}kR^2 \left(2 \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2$$

2 pts

3. mg est en newton et k est en newton par metre. **2 pts**
 4. $E_0 = mgR$ et pour le reste, se souvenir que $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ **1 + 2 pts**
 5. On recherche les extrema de la fonction $E_p(\theta)$ ie les zéros de la dérivée... **2 pts**

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) = E_0 \left(4 \sin \frac{\theta}{2} - 6 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) = 4E_0 \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Les zéros sont évidemment : $\theta = 0$; $\theta = \Omega$ et $\theta = -\Omega$ (la fonction $\cos$ est paire).

Pour la stabilité, il faut regarder le signe de la dérivée seconde : **4 pts**

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = 2E_0 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) + 3E_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} = E_0 \left(3 + 2 \cos \frac{\theta}{2} - 6 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

— Pour $\theta = 0$: $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta = 0) = -E_0 < 0$ donc position instable.

— Pour $\theta = \pm\Omega$: $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta = \pm\Omega) = \frac{5}{3}E_0 > 0$ donc positions stables

6. T.E.C. entre l'état initial correspondant à la position d'équilibre stable et l'état final (position d'équilibre instable) :

$$0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = E_{p,\text{initiale}} - E_{p,\text{finale}} = \frac{E_0}{3} - E_0 \text{ d'où } V_0 = \sqrt{\frac{4E_0}{3m}} = 2\sqrt{\frac{gR}{3}} \text{ 4 pts}$$

7. Le T.E.C. donne :

$$0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = E_{p,\text{initiale}} - E_{p,\text{finale}} = \frac{E_0}{3} - \frac{E_0}{2} \text{ d'où } V_0 = \sqrt{\frac{E_0}{3m}} = \sqrt{\frac{gR}{3}} \text{ 4 pts}$$