

DS6 - acides/bases - forces extolés

1 Titrage de l'aluminium (III) dans un vaccin - 30 min

120

L'aluminium (III) est utilisé comme adjuvant dans la plupart des vaccins (tétanos, coqueluche, hépatite B, ...). Son rôle est d'activer la production d'anticorps.

Cependant, une surdose de ce métal peut s'avérer nocive pour des personnes fragiles. Il est donc important de connaître la teneur en aluminium (III) dans les vaccins.

Données générales à $T = 298 \text{ K}$:

- produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$
- produit de solubilité de $\text{Al}(\text{OH})_3$: $K_s = 10^{-32,1}$
- masses molaires :

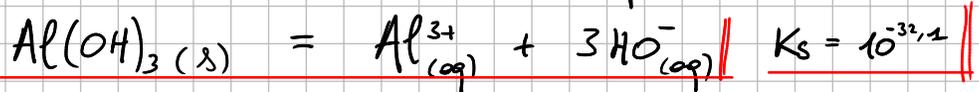
	H	O	Cl	Al
M(g/mol)	1,0	16,0	35,5	27,0

1.1 L'aluminium (III) en solution aqueuse

Dans un vaccin, l'aluminium (III) se trouve sous forme solide $\text{Al}(\text{OH})_3$. Une méthode possible de détermination de la teneur en aluminium (III) passe par la solubilisation de $\text{Al}(\text{OH})_3$ sous forme ionique $\text{Al}_{\text{aq}}^{3+}$.

1. Ecrire l'équation bilan correspondant à l'équilibre de solubilisation (ou de solubilité) de $\text{Al}(\text{OH})_3$ en $\text{Al}_{\text{aq}}^{3+}$.
2. Pour une concentration en $\text{Al}_{\text{aq}}^{3+}$ de $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$, déterminer la valeur maximale du pH afin que le précipité de $\text{Al}(\text{OH})_3$ ne se forme pas.

1] La solubilisation (dissolution) de $\text{Al}(\text{OH})_3$ correspond à l'équilibre :



2] L'énoncé fixe $\kappa_{\text{conv}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le précipité $\text{Al}(\text{OH})_3 (\text{s})$ ne se forme pas si, initialement, le quotient réactionnel

Vérifie :

$$Q_r < K_s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{[\text{Al}^{3+}]_0 \omega^3}{C^0} < K_s$$

D'où

$$\frac{\kappa_{\text{conv}} \times K_e^3}{C^0 h^3} < K_s \quad \Leftrightarrow \quad 3pK_e - 3\text{pH} + 3 > pK_s$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{pH} < \underbrace{pK_e + 1 - \frac{pK_s}{3}}_{\text{pH}_{\text{max}}} \quad \parallel \quad \text{AN: } \text{pH} < \text{pH}_{\text{max}} = 4,3 \parallel$$

1.2 Titrage de l'aluminium (III)

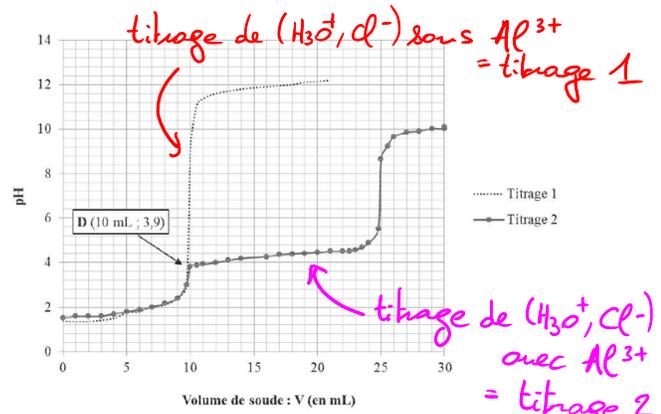
Une méthode possible de titrage de l'aluminium (III) en solution aqueuse consiste à acidifier la solution de vaccin à titrer par de l'acide chlorhydrique afin de convertir l'aluminium (III) en ions Al^{3+} . Cette solution est ensuite titrée par de la soude.

- Un volume $V_0 = 20$ mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire C_1 est titré par une solution de soude de concentration $C = 1,0 \cdot 10^{-1}$ mol/L. Le titrage est suivi par pH-métrie. Le volume de soude versé à l'équivalence est $V_e = 10$ mL. Ecrire l'équation bilan de la réaction mise en jeu lors de ce titrage. Calculer la constante d'équilibre et commenter. Déterminer la valeur de la concentration C_1 .
- Une masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ solide est placée dans une fiole jaugée de volume $V_0 = 20$ mL. On ajoute un peu de la solution précédente d'acide chlorhydrique de concentration C_1 . On agite jusqu'à dissolution totale du solide puis on complète avec la même solution chlorhydrique jusqu'au trait de jauge. L'équation de dissolution du solide en milieu acide est :



On appelle (S) la solution obtenue et on note C_1 la concentration molaire en ions H_3O^+ et C_2 celle en ions Al^{3+} .

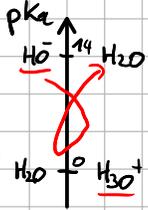
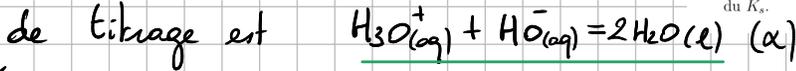
Le volume $V_0 = 20$ mL de solution (S) est titré par une solution de soude de concentration $C = 1,0 \cdot 10^{-1}$ mol/L. Le titrage est suivi par pH-métrie. Au cours du dosage, on remarque l'apparition d'un précipité blanc. La courbe d'évolution du pH est donnée ci-dessous (celle avec les gros points = titrage 2).



Ecrire les équations des deux équations mises en jeu lors de ce titrage et relever les valeurs des volumes équivalents V_{e1} et V_{e2} .

- Justifier que les ions H_3O^+ sont dosés en premier. A partir de quel volume de soude le précipité blanc apparaît-il ?
- Donner le volume de soude ayant effectivement réagi avec les ions Al^{3+} . En déduire la valeur de C_2 .
- Quelle masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté a servi à la préparation de la solution (S) ?
- On souhaite retrouver la valeur du K_s de $Al(OH)_3$ à partir des coordonnées du point D sur la courbe précédente. Que vaut la concentration molaire en ions OH^- dans le bécher au point D ? En tenant compte de la dilution, déterminer la concentration molaire de Al^{3+} au point D. En déduire une valeur du K_s .

1|| Pour le titrage 1: la réaction support



de constante d'équilibre thermodynamique :

$$K^o = \frac{1}{h w} = \frac{1}{K_e} = 10^{14}$$

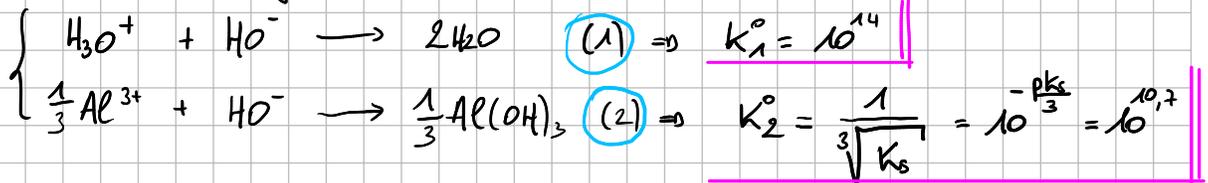
Commentaire :

Réaction totale

Considérant la stœchiométrie dans (α), on en déduit

$$C_1 V_0 = C V_e \Rightarrow C_1 = C \frac{V_e}{V_0} \quad \text{AN: } C_1 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2|| Les 2 réactions mises en jeu, en assumant la même molécularité pour HO^- donne :



On relève $V_{e1} = 10$ mL et $V_{e2} = 25$ mL

3|| Comme $K_1^o > 10^3 K_2^o \Rightarrow$ la 1^{re} réaction a lieu avant la seconde.

À partir de $V_{e1} = 10$ mL, le précipité de $Al(OH)_3$ apparaît puisque HO^- a commencé à s'accumuler en solution.

4|| Tant que les ions HO^- réagissent avec Al^{3+} , ils ne font pas augmenter

le pH \Rightarrow ça se passe entre $V_{e1} = 10$ mL et $V_{e2} = 25$ mL.

Avec la stœchiométrie de la réaction 2, on a :

$$3 C_2 V_0 = C (V_{e2} - V_{e1}) \Rightarrow C_2 = C \frac{V_{e2} - V_{e1}}{3 V_0} \quad \text{AN: } C_2 = 2,5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

5) On calcule la masse molaire de $AlCl_3 \cdot 6H_2O = M = 241,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

On en déduit la masse de $AlCl_3 \cdot 6H_2O =$

$$m = C_2 V_0 M = 121 \text{ mg}$$

6) Le précipité commence à apparaître au point anguleux D où $V_e = 10 \text{ mL}$ et $\text{pH} = 3,9$.

À ce point, en tenant compte de la dilution :

$$[Al^{3+}] = \frac{C V_0}{V_0 + V_{e1}} = \frac{C}{3}$$

Par ailleurs, $w = \frac{K_e}{h} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_e}$

$$D'où \quad K_s = \frac{[Al^{3+}]}{C^0} w^3 = \frac{C}{3C^0} \times 10^{3(\text{pH} - \text{p}K_e)}$$

$$K_s = 1,67 \times 10^{-32} \quad ??$$

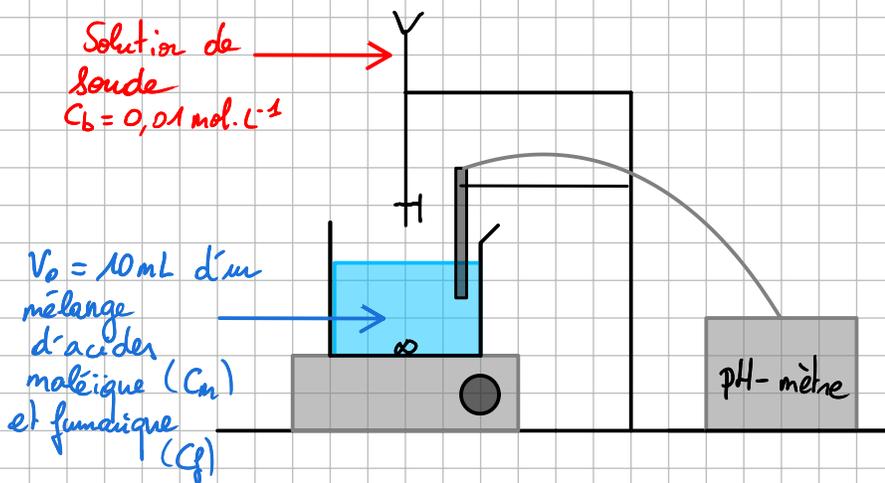
$$\text{p}K_s = 31,8 \approx 32,1$$

2 Titrage d'un mélange d'acides - 15 min.

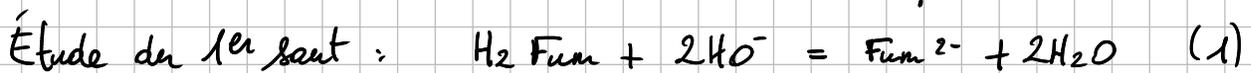
L'acide maléique (noté $MalH_2$) et l'acide fumarique (noté $FumH_2$) sont deux di-acides stéréoisomères. Les $\text{p}K_{a1}$ de l'acide maléique sont $\text{p}K_{a1} = 1,8$ et $\text{p}K_{a2} = 7$ et les $\text{p}K_a$ de l'acide fumarique sont $\text{p}K_{a3} = 3$ et $\text{p}K_{a4} = 4$.

Une solution (S) est formée d'un mélange d'acide maléique de concentration C_m et d'acide fumarique de concentration C_f .

On dose un volume $V_0 = 10 \text{ mL}$ de solution (S) avec de la soude de concentration $C_b = 0,01 \text{ mol/L}$. On observe deux sauts de pH : l'un pour $V_e = 14 \text{ mL}$ et l'autre pour $V_e' = 21 \text{ mL}$. Déterminer les valeurs de C_m et de C_f . Le candidat apportera un grand soin à la rédaction et aux explications.



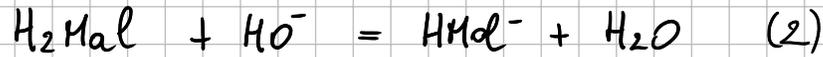
On observe 2 sauts de pH. La proximité des $\text{p}K_a$ 1,2 et 3 nous indique que le premier saut de pH correspond au titrage des 2 acidités de l'acide fumarique et de la 1^{ère} acidité de l'acide maléique.



Constante thermodynamique $K_1^0 = \frac{[Fum^{2-}]}{[H_2 Fum]} \frac{1}{w^2} \times \frac{h^2}{h^2} \times \frac{[HFum^-]}{[HFum^-]} = 10^{2\text{p}K_e - \text{p}K_{a3} - \text{p}K_{a4}}$

D'où $K_1^0 = 10^{28-3-4} = 10^{21}$: réaction totale du titrage des 2 acidités de H_2Fm .

Dans le même saut, il y a titrage de la 1^{re} acidité de H_2Mol



Constante thermodynamique $K_2^0 = \frac{[HMol^-]}{[H_2Mol]} \times \frac{1}{\omega} \times \frac{h}{h} = 10^{pk_2 - pk_{a1}} = 10^{12,2}$

Réaction également quantitative! Le bilan de matière issu de la superposition de ces 2 réactions donne:

$$(C_m + 2C_f) V_0 = C_b V_e \Rightarrow 2C_f + C_m = C_b \frac{V_e}{V_0} = 1,4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

Étude du 2nd saut: On titre alors la 2^{de} acidité de l'acide moléique:



Constante thermodynamique: $K_3^0 = \frac{[Mol^{2-}]}{[HMol^-]} \times \frac{1}{\omega} \times \frac{h}{h} = 10^{pk_2 - pk_{a2}} = 10^7$

La réaction est totale. Le volume de sonde pour le titrage de cette acidité est $V_e' - V_e$ et le bilan de matière donne:

$$C_m V_0 = C_b (V_e' - V_e) \Rightarrow C_m = C_b \frac{V_e' - V_e}{V_0}$$

AN: $C_m = 7,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$

Puis avec le 1^{er} saut:

$$C_f = \frac{1}{2} \left(C_b \frac{V_e}{V_0} - C_m \right) = 3,5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

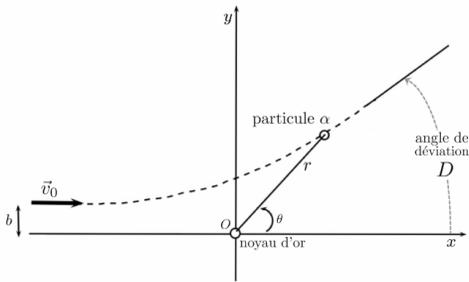
- ② pour l'analyse des sauts avec pK_a ou K^0
- ① pour la stœchiométrie pour chaque saut.
- ① pour C_m et 1 pour C_f

3 Diffusion de Rutherford - 45 min.

24

RUTHERFORD a étudié expérimentalement en 1911 la déviation d'une particule α (noyau d'hélium de masse m et de charge $q = 2e$) par un noyau d'or (de masse M très grande par rapport à la masse m de la particule α , et de charge $Q = Ze$) supposé immobile en O dans le référentiel du laboratoire. Dans tout le problème, on néglige la force de gravitation entre les deux noyaux et le poids des noyaux, seule la force de COULOMB joue un rôle.

La particule α est lancée à une vitesse initiale v_0 vers le noyau cible, avec un paramètre d'impact b , comme le montre la figure ci-dessous.



La force de COULOMB qui s'applique sur la particule α de la part du noyau d'or est $\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur radial. On notera, pour simplifier, cette force sous la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$

1. Justifier que la force \vec{F} est une force centrale.
2. Montrer que le moment cinétique en O de la particule α est constant.
3. Justifier que le mouvement de la particule α est plan.
4. Exprimer le moment cinétique de la particule α en fonction de m, θ et r .

5. Expliquer pourquoi ce moment cinétique est aussi égal à $-mbv_0 \vec{e}_z$.
6. Etablir l'expression de l'énergie potentielle coulombienne en fonction de K et r . On choisira l'énergie potentielle nulle quand $r \rightarrow +\infty$
7. On note v la vitesse de la particule α dans le référentiel galiléen du laboratoire. Exprimer v^2 en fonction de r et de θ . En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$.
8. Justifier que l'énergie mécanique E_m initiale vaut $\frac{1}{2}mv_0^2$ et que E_m est constante au cours du mouvement.
9. Obtiens-on un état lié ou un état de diffusion. On justifiera!
10. Déterminer la distance minimale r_{min} atteinte par la particule α .
11. Appliquer le PFD à la particule α et le projeter sur (Ox) . Ecrire alors $m \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{r^2} f(\theta)$ où $f(\theta)$ est une fonction à déterminer.
12. Justifier que $\frac{1}{r^2} = -\frac{\dot{\theta}}{bv_0}$ et que $v_x(t \rightarrow +\infty) = v_0 \cos(D)$ où D est l'angle de déviation de la particule α .
13. Montrer à l'aide d'une intégration entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$ que $m v_0 (1 - \cos D) = -K \sin D$
14. En se rappelant que $\cos D - 1 = -2 \sin^2 \frac{D}{2}$, donner l'expression de $\tan \left(\frac{D}{2} \right)$ en fonction de K, m, v_0 et b .
15. On envoie un faisceau de particules α sur une mince feuille d'or. Qu'observe-t-on?

1

1 || $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \hat{e}_r \parallel \hat{e}_r \Rightarrow$ force radiale donc centrale, répulsive ici!

1

2 || D'après le TMC: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{\vec{OM} \parallel \vec{F}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{cst}$

1

3 || $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = \vec{cst}$ perpendiculaire à \vec{OM} et \vec{v}
 $\Rightarrow \forall t, (O, \vec{OM}, \vec{v})$ sont dans un plan \perp à $\vec{L}_O = \vec{cst}$: Mouvement plan - plan fixé par les CI!

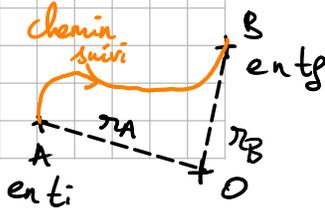
1

4 || En coordonnées cylindriques: $\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{CP}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{CP}$
 D'où $\vec{L}_O = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{CP} \wedge m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{CP} = m r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z$

1

5 || Initialement, la particule α est très loin du noyau d'or. Les vecteurs position et vitesse initiales sont en coordonnées $\begin{pmatrix} -x_0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 D'où le moment cinétique: $\vec{L}_O = \begin{pmatrix} -x_0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -m v_0 b \hat{e}_z$

6 || Travail élémentaire de \vec{F} : $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \begin{pmatrix} +K/r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{CP} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix} = \frac{K}{r^2} dr$



Intégrée entre une position initiale A et finale B, on voit que le travail ne dépend que de r_A et de r_B et non du chemin suivi entre A et B = C'est une force conservative (qui dérive d'un potentiel). On pose par définition:

$$SW(\vec{F}) = + \frac{K}{r^2} dr = - dE_p$$

primitive / r $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_p}{dr} = - \frac{K}{r^2} \\ E_p(r) = \frac{K}{r} + cste \end{array} \right. \parallel$

On fixe la constante avec la convention:

$$E_p(r \rightarrow \infty) = 0 = cste = 0 \quad \underline{E_p(r) = \frac{K}{r}} \parallel$$

7) On a déjà vu qu'en cylindro-polaires

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{cp} \Rightarrow \underline{v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \parallel$$

Avec la conservation du moment cinétique $L_z = \|\vec{L}_z\| = + m b v_\theta = cste$.

On peut réécrire l'énergie cinétique:

$$\underline{E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m v_\theta^2 \frac{b^2}{r^2}} \parallel$$

\vec{F} étant conservative, E_m est conservée:

$$\underline{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m v_\theta^2 \frac{b^2}{r^2} + \frac{K}{r}} \parallel$$

$E_{\text{eff}}(r)$

D'où $\underline{E_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m v_\theta^2 \frac{b^2}{r^2} + \frac{K}{r}} \parallel$

8) La seule force est \vec{F} conservative $\Rightarrow E_m = cste$ fixée par la C.I.

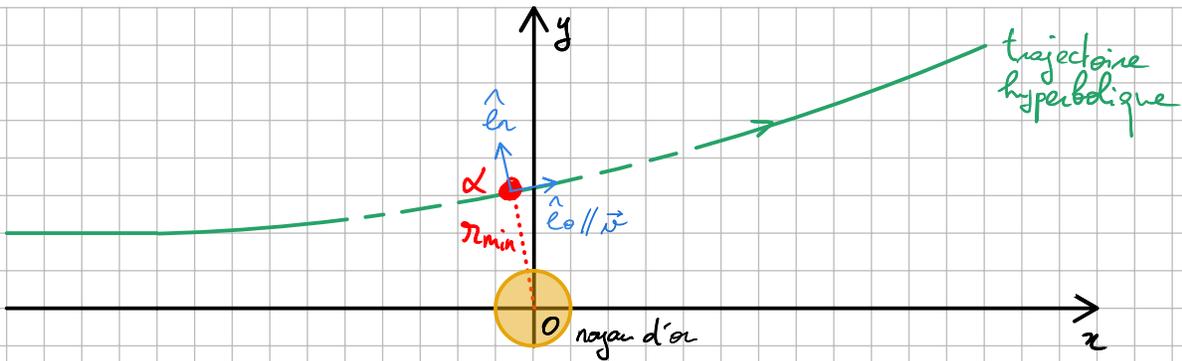
Initialement: $E_m = E_{ci} + E_{pi} \quad \underline{d'où \quad E_m = \frac{1}{2} m v_0^2} \parallel$
 $= 0 \text{ car } r \rightarrow \infty$



Pas de puits de E_{eff}
 et $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 > 0$

\Rightarrow pas d'états liés, états de diffusion!

101



Quand $r = r_{\min} \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $E_m = E_{\text{peff}}(r_{\min})$:
 la vitesse v est strictement orthogonale :

D'où

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_m(r_{\min}) = E_{\text{peff}}(r_{\min})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{k}{r_{\min}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{2k}{m v_0^2 r_{\min}}$$

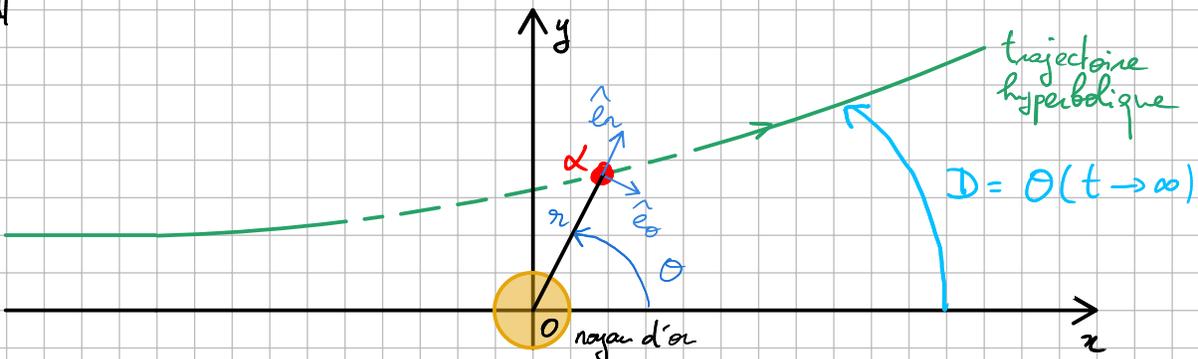
$$\Leftrightarrow r_{\min}^2 - 2 \frac{k}{m v_0^2} r_{\min} - b^2 = 0$$

On résoud sauvagement :

$$r_{\min \pm} = \frac{k}{m v_0^2} \pm \sqrt{b^2 + \frac{k^2}{m^2 v_0^4}}$$

D'où $r_{\min} = \frac{k}{m v_0^2} + \sqrt{b^2 + \frac{k^2}{m^2 v_0^4}}$ impossible car $r_{\min} > 0$!

111



On applique le PFD à la particule α : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

d'où
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = + \frac{K}{r^2} \hat{e}_r$$

On projette sur \hat{e}_x de la base cartésienne sachant que $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m \dot{v}_x = \frac{K}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_x = \frac{K}{r^2} \cos \theta$

$\Rightarrow m \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{r^2} \cos \theta$ On identifie $f(\theta) = \cos \theta$

12|| Avec les questions 4|| et 5|| on a $m r^2 \dot{\theta} = - m b v_0$

d'où
$$\frac{1}{r^2} = - \frac{\dot{\theta}}{b v_0}$$

Par ailleurs, on sait que $E_m = E_{m_i} = \frac{1}{2} m v_0^2$ et quand $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ et $E_p = 0 \Rightarrow E_m(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} m v_0^2$.

On en déduit $v_0 = v_0$ (ce système conservatif) et

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos D \\ v_0 \sin D \\ 0 \end{pmatrix}$$
 d'où
$$v_x(t \rightarrow \infty) = \vec{v}_0 \cdot \hat{e}_x = v_0 \cos D$$

13|| On réécrit le résultat de la question 11|| avec les résultats de la 12||

Séparation des variables

$$m \frac{dv_x}{dt} = - K \frac{\dot{\theta}}{b v_0} \cos \theta \Rightarrow m dv_x = - \frac{K}{b v_0} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_x} dv_x = - \frac{K}{m b v_0} \int_{+\pi}^D \cos \theta d\theta$$

$\Rightarrow v_0 (\cos D - 1) = - \frac{K}{m b v_0} \sin D$

$\Rightarrow m v_0^2 (1 - \cos D) = \frac{K}{b} \sin D$

$\frac{K}{b}$ et $m v_0^2$ en J, oui!
Homogénéité OK!
Signe OK aussi!

14] Avec la formule donnée :

$$2 M v_0^2 \sin^2 \frac{D}{2} = 2 \frac{K}{b} \sin \frac{D}{2} \cos \frac{D}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{D}{2} = \frac{K}{m v_0^2 b}$$

15] Suivant le paramètre d'impact b , les particules sont plus ou moins déviées. Quand $b \rightarrow 0$, les particules sont rétrodiffusées dans la direction opposée au faisceau incident de particules α . C'est ce qui a amené Rutherford à faire l'hypothèse d'un noyau dense et de beaucoup de vide dans un atome d'or par ailleurs!

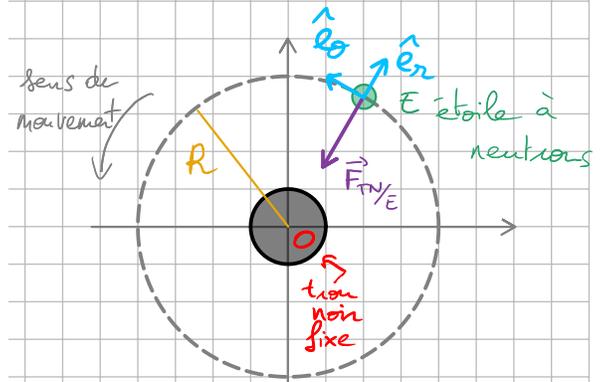
4 Effondrement d'un système binaire - 30 min.

Une étoile à neutrons de masse m gravite autour d'un trou noir de masse $M \gg m$ si bien que le barycentre du système est confondu avec le centre du trou noir. On néglige les interactions avec d'autres astres. Dans la suite du problème, nous travaillerons dans le référentiel associé au trou noir, ce référentiel sera supposé galiléen.

- On suppose que l'étoile à neutrons est en orbite circulaire de rayon R autour du trou noir. Etablir l'expression de la vitesse angulaire ω de ce mouvement en fonction de la constante universelle de la gravitation \mathcal{G} et des autres paramètres.
- Peu de temps avant l'effondrement du système, la période de rotation vaut $T = 1$ s. Sachant que le trou noir a une masse de 10 fois celle de notre Soleil, en déduire la distance R_0 qui sépare les deux astres. On donne la masse du Soleil : $2 \cdot 10^{30}$ kg et la valeur de $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI.
- Quelle est l'énergie mécanique du système en fonction de \mathcal{G} , M , m et R_0 ?
- Le système est la source d'ondes gravitationnelles qui transportent une certaine énergie. Un calcul de relativité générale montre que la puissance ainsi émise s'écrit, dans le référentiel lié au trou noir : $\mathcal{P}_{OG} = \frac{32\mathcal{G}}{5c^5} m^2 R^4 \omega^6$ où $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (vitesse de la lumière dans le vide). Du point de vue de la mécanique, l'émission des ondes gravitationnelles peut être modélisée par une force non conservative agissant sur le système des deux astres avec une puissance $-\mathcal{P}_{og}$. Quelle est la conséquence de cette perte d'énergie sur la distance R entre les deux astres?

5. Le rayon R de la trajectoire est désormais considéré comme une fonction $R(t)$ du temps et il est admis que l'expression E_m de l'énergie mécanique déterminée plus haut reste valable c-à-d que $E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2R(t)}$

- Montrer que $R(t)$ varie selon une loi $\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{R^3}$. On exprimera α en fonction de \mathcal{G} , m , M et c . On pourra admettre cette équation et poursuivre sans connaître l'expression de α .
- A $t = 0$, la distance est $R(t=0) = R_0$. Déterminer alors $R(t)$ en fonction de R_0 et α .
- Représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de l'étoile à neutrons dans le référentiel lié au trou noir.



1] Pour un mouvement circulaire :

$$\vec{OE} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{CP/O} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \\ 0 \end{pmatrix}_{CP/O} \text{ et } \vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \\ R\dot{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}_{CP/O}$$

PFD: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$

$$= 0 \quad \begin{vmatrix} -\mathcal{G} \frac{Mm}{R^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{CP/O} = \begin{vmatrix} -mR\omega^2 \\ mR\dot{\omega} \\ 0 \end{vmatrix}_{CP/O}$$

(PFD) $\cdot \hat{e}_\theta \Rightarrow \dot{\omega} = 0$: le mouvement circulaire est aussi uniforme $\Rightarrow \omega = \text{cte}$

(PFD) $\cdot \hat{e}_r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{OR^3}}$

2] On nous donne $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 1$ s et $M = 10 M_\odot = 2 \times 10^{31}$ kg

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{OR_0^3}}$$

$$\Rightarrow R_0 = \left(\frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2 T_0^2} \right)^{1/3}$$

AN:

$$R_0 = 3230 \text{ km}$$

3) Pour le système {étoile à neutrons}, comme le mouvement est circulaire et uniforme:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R_0^2 \omega^2 = \frac{1}{2} g \frac{Mm}{R_0^2}$$

$$E_p = -g \frac{Mm}{R_0}$$

$$E_m = -g \frac{Mm}{2R_0}$$

4) Avec la force non conservative modélisant la perte d'énergie par émission des ondes gravitationnelles, on a, d'après le TPM

$$\frac{dE_m}{dt} = -P_{OG} < 0$$

donc $E_m = -g \frac{Mm}{2R}$ avec $t \uparrow \Rightarrow R \downarrow$ quand $t \uparrow$

L'étoile et le trou noir se rapprochent.

5)

a) On écrit le TPM complètement:

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{32g}{5c^5} m^2 R^4 \omega^6 \quad \text{avec } E_m = -g \frac{Mm}{2R} \leftarrow \text{seule fonction de } t$$

À gauche = 0 $\frac{dE_m}{dt} = + \frac{gMm}{2R^2} \dot{R}$ et à droite $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$ donc $\omega^6 = \frac{G^3 M^3}{R^3}$

$$\Rightarrow \frac{gMm}{2R^2} \dot{R} = -\frac{32g^4 m^2}{5c^5} R^4 \frac{M^3}{R^3} \rightarrow \frac{1}{R^3}$$

$$\Rightarrow \dot{R} = -\frac{64g^3}{5c^5} \frac{mM^2}{R^3}$$

D'où $\frac{dR}{dt} = -\alpha \frac{1}{R^3}$ avec $\alpha = \frac{64g^3}{5c^5} mM^2$

b) On part de $\frac{dR}{dt} = -\frac{\alpha}{R^3}$ et on sépare les variables:

$$\int_{R_0}^{R(t)} R^3 dR = -\alpha \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{4} (R^4 - R_0^4) = -\alpha t$$

$$\Rightarrow R(t) = (R_0^4 - 4\alpha t)^{1/4}$$

1

C1 Ça tourne mais $R(t) \rightarrow \infty$ spirale

Ça s'effondre !

