

Couigé DS7

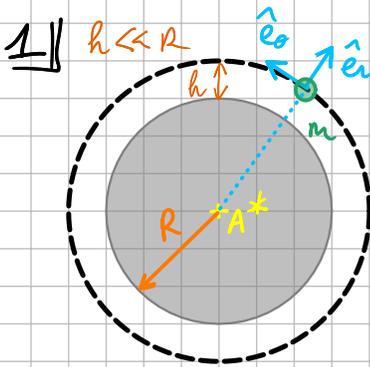
tot/48

1/16

1 Le trou noir Sagittarius A* - 40 min.

En astrophysique, un trou noir est un objet céleste si compact que l'intensité de son champ gravitationnel empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper. De tels objets ne peuvent ni émettre ni réfléchir la lumière et sont donc noirs, ce qui en astronomie revient à dire qu'ils sont invisibles. Par les effets sur les trajectoires des étoiles proches, on peut déceler l'existence de tels objets massifs. Sagittarius A* (en abrégé $SgrA^*$) est un trou noir localisé au centre de la Voie Lactée, dans la constellation du Sagittaire.

En 2002, une équipe internationale conduite par Rainer Schödel de l'Institut Max Planck de physique extraterrestre a observé le mouvement de l'étoile S_2 proche de $SgrA^*$ sur une durée de 10 ans et obtenu la preuve que cet astre est un objet extrêmement massif et compact. Les trajectoires reconstituées de certaines étoiles sont représentées sur la figure ci-dessous.



Orbite basse circulaire : rayon R car $h \ll R$
orbite basse

PFD: $-m \frac{v_1^2}{R} \hat{e}_r = -G \frac{Mm}{R} \hat{e}_r$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}}$$

Vitesse de libération: quand la particule

peut aller à l'infini avec une vitesse nulle $\rightarrow E_m = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{Mm}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2} v_1$$

2) On remplace v_2 par c et R par R_s $\Rightarrow R_s = \frac{2GM}{c^2}$

AN: $R_s = 2964 \text{ m} \approx 3000 \text{ m}$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R_s^3} \approx 1,8 \times 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

C'est énorme : le soleil dans une boule de rayon 3km!

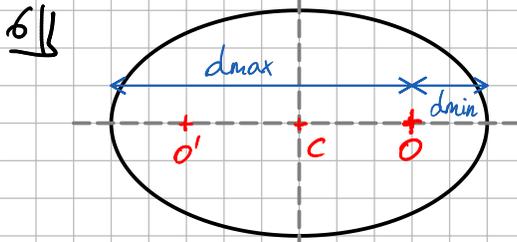
3) $v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{cte}$ généralisation: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

4) Avec la généralisation: $a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$ AN: $a = 1,45 \times 10^{14} \text{ m}$

D'où le grand axe: $2a = 2,9 \times 10^{14} \text{ m}$

5||
$$\left. \begin{aligned} d_{\min} &= \min(r) = \frac{P}{1+e} \\ d_{\max} &= \max(r) = \frac{P}{1-e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} d_{\max} - d_{\min} &= \frac{2eP}{1-e^2} \\ d_{\max} + d_{\min} &= \frac{2P}{1-e^2} = 2a \\ \Rightarrow e &= \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2a} \end{aligned}$$

② pour e



① pour dmin
① pour AN

$$CO = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2} = ae \text{ car } d_{\max} - d_{\min} = 2ae$$

 et
$$d_{\min} = a - CO = a(1-e)$$

 D'où
$$d_{\min} = 4,35 \times 10^{13} \text{ m}$$

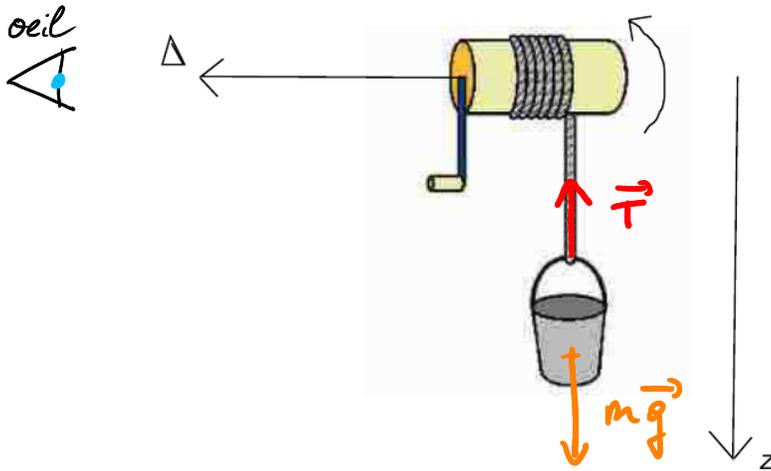
7|| Sur la figure, on a $a_1 \approx 4a_2$ et $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$

$$\Rightarrow T_1 = 4^{\frac{3}{2}} T_2 = 8T_2 \approx 120 \text{ ans}$$

② pour T1 avec explication

2 Mécanisme de puits - 40 min. (1/18)

Une corde de diamètre très faible est enroulée autour d'un arbre cylindrique de rayon R et de masse M . Un seau plein d'eau de masse totale m est accroché au bout de la corde. Une personne actionne une manivelle qui remonte le seau à la vitesse constante v . Pour les applications numériques, on prendra $R = 5 \text{ cm}$; $M = 5 \text{ kg}$; $m = M$; $v = 0,2 \text{ m/s}$ et $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

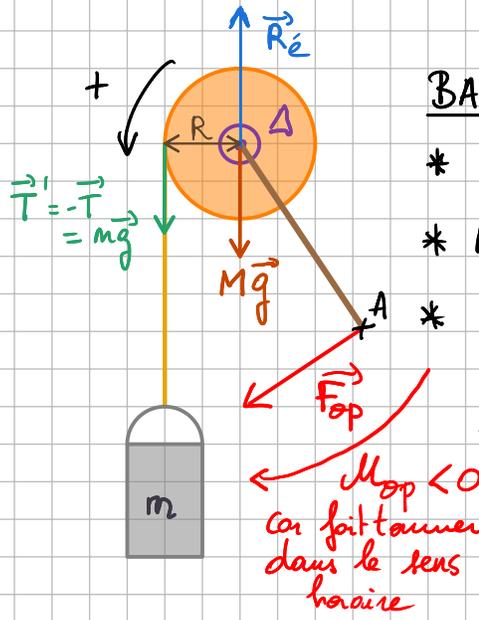


① pour 4
① pour 38
① pour T = mg

1|| Ici $v = +\dot{z} = +R\dot{\theta} \Rightarrow \omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R} = \frac{0,2}{0,05} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx 38 \text{ tour/min}$

2|| PFD / seau: $m\ddot{z} = +mg - T = 0 \text{ car MRU} \Rightarrow T = mg$

3|| On fait un schéma de l'arbre vue par la gauche (Voir œil)



BAME pour l'arbre

- * Poids $M\vec{g}$: $\mathcal{M}/\Delta(M\vec{g}) = 0$ car $\text{bdl } r_{\perp} = 0$
- * Réaction de l'axe \vec{R}_e : $\mathcal{M}/\Delta(\vec{R}_e) = 0$ car $\text{bdl } r_{\perp} = 0$
- * Corde qui tire avec $\vec{T}' = m\vec{g}$: $\mathcal{M}/\Delta(\vec{T}') = +mgR$
car $\text{bdl } r_{\perp} = R$
- * \vec{F}_{op} via la manivelle avec $\mathcal{M}_{op} < 0$ car sa fait tourner dans le sens horaire.

Remarque: dans la question qui suit \mathcal{M}_{op} est appelé $-\mathcal{M}' = \mathcal{M}_{op}$.

4|| On applique le TMCS à l'arbre

J'arbre $\dot{\omega} = \sum \mathcal{M}/\Delta \text{ ext} \Rightarrow 0 = mgR - \mathcal{M}'$
 $= 0$ car $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$
 $\Rightarrow \mathcal{M}' = mgR$ || Δ c'est la valeur absolue!
AN $\mathcal{M}' = 2,45 \text{ N}\cdot\text{m}$ ||

5|| On calcule $\mathcal{M}' = |\mathcal{M}_{op}| = F_{op} \times r_{\perp}$ avec $r_{\perp} = L$

D'où $F_{op} = \frac{\mathcal{M}_{op}}{L}$ || AN $\Rightarrow F_{op} = 24,5 \text{ N}$ ||

Pour la puissance: la vitesse du point d'application est $L\omega$
d'où

$P_{op} = F_{op} \times L\omega = mgL\omega = \mathcal{M}'\omega$
D'où $P_{op} = \mathcal{M}'\omega$ || AN $P_{op} = 9,8 \text{ W}$ ||

6.|| Le moment d'inertie est extensif:

$J = J_m + J_a$

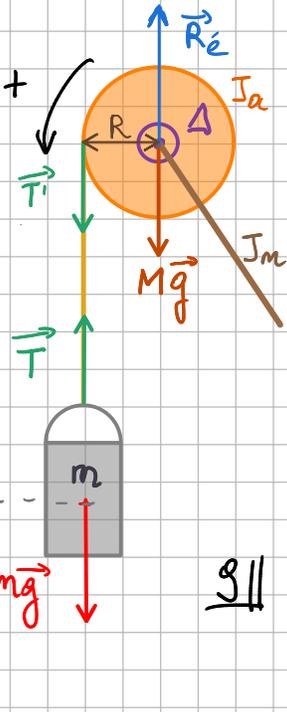
2 avec 0,5 par force

1 pour mgR
1 pour AN

2 tout ou rien

1

7. ||



PFD / {seau} $m \ddot{z} = mg - T$ avec $T = T'$ (Corde tendue)
 $\Rightarrow T = m(g - \ddot{z})$

8 || Géométrie : Corde tendue inextensible :

$z = z_0 + R\theta \Rightarrow \dot{z} = R\dot{\omega} \Rightarrow \ddot{z} = R\ddot{\omega}$

9 || TMCs sur {arbre + manivelle}

$\sum \dot{\omega} = \mathcal{M}_A(\vec{T}') = RT$

Or $T = m(g - R\ddot{\omega}) \Rightarrow \sum \dot{\omega} = mgR - mR^2\ddot{\omega}$

d'où $\ddot{\omega} = \frac{mgR}{J + mR^2}$ Comme en TP, mouvement à accélération angulaire constante.

10 || On applique le TMC au même système avec les frottements solides qui s'opposent aux rotations dans le sens direct :

$\sum \dot{\omega} = -\Gamma$

11 || $\ddot{\omega} = -\frac{\Gamma}{J} \xrightarrow{\text{intég}} \omega(t) = -\frac{\Gamma}{J}t + \omega_0$

12 || Temps de freinage = temps d'arrêt : on le note t_f

$\omega(t_f) = 0 \Leftrightarrow t_f = \frac{J\omega_0}{\Gamma}$

13 || TEC pour le solide en rotation : $\Delta E_c = \sum W_{\text{ext}} = \sum \mathcal{M}_A \times \omega$

On ici $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$ et $\sum \mathcal{M}_A \omega = -\Gamma \cdot \omega = \mathcal{P}_{\text{frottements}}$

D'où $W_{\text{frottements}} = -\frac{1}{2} J \omega_0^2$

1 pour T

1 pour $\ddot{z} = R\ddot{\omega}$

1 pour $\ddot{\omega}$

1 pour TMCs avec signe!

1 pour $\omega(t)$

1 pour t_f

1 pour TEC correct

1 pour $W_{\text{frottements}}$

3 Générateur MHD – 40 min.

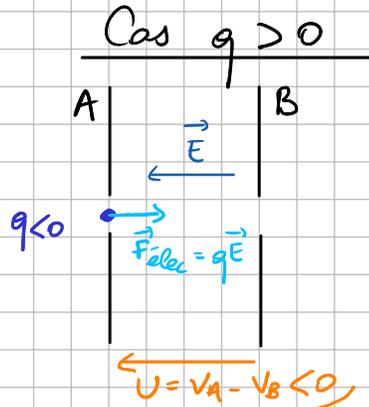
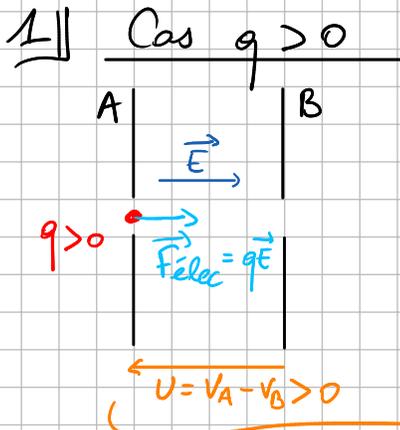
14

3.1 Action d'un champ électrique uniforme

négligeable

Une particule de charge q et de masse m , de vitesse initiale très faible est accélérée entre deux électrodes A et B par une d.d.p. $U = V_A - V_B$: la particule se déplace de A vers B.

1. Quel est le signe de U ? On justifiera soigneusement.
2. Dans le cadre de la mécanique classique, établir le plus simplement possible l'expression de la vitesse de la particule en fin d'accélération en fonction de sa masse et du produit qU .
3. Application numérique : quelle est l'énergie cinétique obtenue lorsqu'on accélère un ion Mg^{2+} sous une tension de 1000 V?



$\vec{E} = - \text{grad } V$ vers les potentiels décroissants

2 || On utilise la TEM entre A et B

$$E_m = \text{cte} = \underbrace{E_C}_0 + qV_A = E_C + qV_B$$

Méca classique : $E_C = \frac{1}{2} m v_B^2 = q(V_A - V_B) = qU$

d'où $v_B = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

3 || Pour Mg^{2+} : $q = 2e \Rightarrow$ $E_C = 2eU$

\Rightarrow AN : $E_C = 2 \text{ keV} = 3,2 \times 10^{-16} \text{ J}$

1
Tout on rien

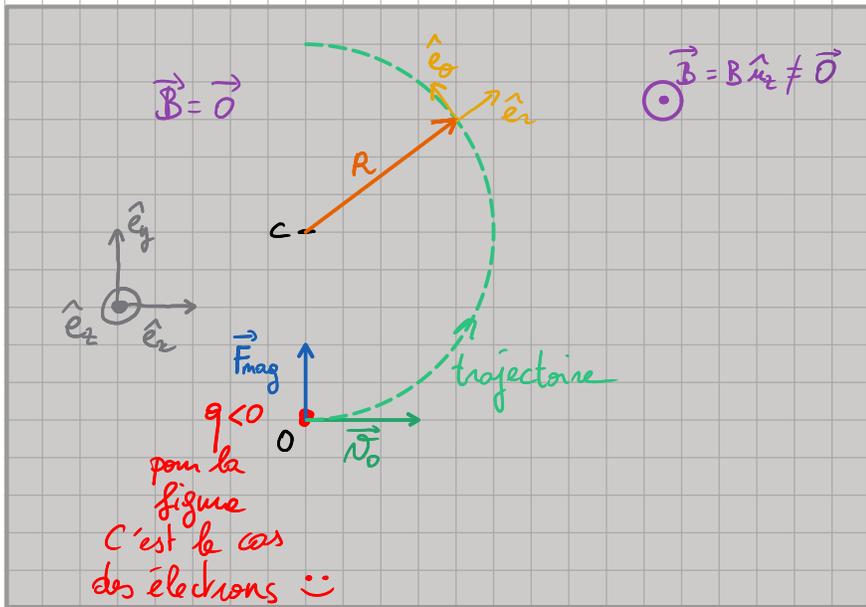
2
Tout on rien

1
Tout on rien

3.2 Action d'un champ magnétique uniforme

Une particule chargée pénètre en O dans une région de l'espace où existe un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} qui oriente l'axe z : $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La vitesse \vec{v}_0 de la particule lorsqu'elle arrive en O est perpendiculaire à \vec{B} .

- On envisage un champ de l'ordre du tesla, et des particules pour lesquelles les ordres de grandeur sont :
 - charge : quelques fois la charge élémentaire
 - vitesse : quelques centaines de mètres par seconde
 - masse : inférieures ou égales à 10^{-25} kg
 Montrer qu'en présence du champ magnétique, on ne tiendra pas compte du poids.
- Sans rechercher les équations du mouvement, montrer que le mouvement de la particule sera uniforme, et dans un plan que l'on précisera.



1|| $F_{\text{mag}} \approx qv_0B$

AN: $f_{\text{mag}} \approx e v_0 B = 10^{-12} \text{ N en ordg}$

$mg \approx 10^{-24} \text{ N en ordg}$

$\frac{mg}{F_{\text{mag}}} \approx 10^{-7} \Rightarrow mg \ll F_{\text{mag}}$

On néglige le poids.

2|| $\forall t, P_{\text{mag}} = \underbrace{(q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{\perp \vec{v}} = 0 \Rightarrow F_{\text{mag}} \text{ ne travaille pas}$

et $\frac{dE_c}{dt} = 0 \Rightarrow E_c = \text{cte}$ et $v = \text{cte} = \underline{\text{Mouvement uniforme}}$

Dans ce cas particulier, \vec{v}_0 et $\vec{F}_{\text{mag}} \perp \vec{B}$.

De plus \vec{F}_{mag} ne modifie pas v mais courbe la trajectoire dans le plan $\perp \vec{B}$

\Rightarrow trajectoire circulaire dans le plan $\perp \vec{B}$

3|| Vous pouvez faire en Frénet :

le schéma donne : $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} \hat{e}_r + \dot{v} \hat{e}_\theta$

PFD $\Rightarrow -m \frac{v_0^2}{R} \hat{e}_r = -|q| v_0 B \hat{e}_r \Rightarrow R = \frac{m v_0}{|q| B}$ car uniforme

1
comparaison

1 pour
 $v = \text{cte}$

1 pour le
plan

2 pour R

4|| Pour $R = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$ et $B = 10^{-3} \text{ T}$

$= 0 \quad v_0 = \frac{191BR}{m}$

AN: $v_0 \approx 7 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$

Assez faible pour que le traitement non relativiste tienne!

5|| \vec{B} agit avec \vec{F}_{mag} dans le plan $\perp \vec{B}$.

Si $\vec{v}(\text{en } 0) = v_0 \hat{x} + v_1 \hat{z}$, aucune force suivant \hat{z}

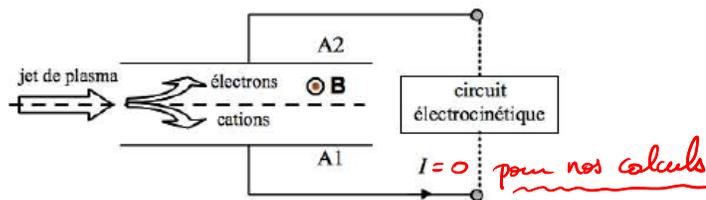
\Rightarrow trajectoire hélicoïdale ☺

① pour v_0

① pour la trajectoire hélicoïdale

3.3 Générateur magnétohydrodynamique

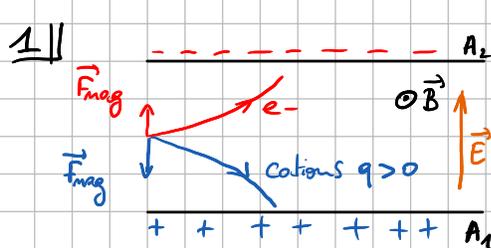
On envisage le dispositif représenté ci-dessous. A1 et A2 sont des armatures métalliques planes perpendiculaires au plan de figure, distantes de D :



Principe de fonctionnement : un dispositif non représenté ionise des gaz de combustion d'hydrocarbures pour produire un jet de plasma, mélange d'ions positifs et d'électrons. Lorsque ce plasma subit le champ magnétique \vec{B} uniforme entre les armatures, les électrons et les cations sont déviés de part et d'autre de la direction initiale du jet. Recueillis par l'armature A2, les électrons peuvent alors circuler dans le circuit électrocinétique pour rejoindre l'armature A1 : on a donc réalisé un générateur qui fait circuler un courant conventionnel d'intensité I de A1 vers A2 dans le circuit : $I > 0$.

On se propose de déterminer la force électromotrice de ce générateur : comme on sait qu'il s'agit de trouver sa tension à vide, on envisage dans la suite le dispositif de la figure, mais sans connecter le générateur à un circuit : il ne fournit donc aucun courant, $I = 0$.

1. Les armatures étant initialement déchargées, le champ \vec{B} est appliqué à partir de $t = 0$ au jet de plasma. Expliquer sans calcul ce qui se passe au niveau des armatures A1 et A2 ; en déduire qualitativement l'évolution vers un régime permanent dans lequel le jet de plasma traverse l'espace entre les plaques sans être dévié.
2. Montrer que ce régime permanent correspond à l'existence entre A1 et A2 d'un champ électrique \vec{E} que l'on exprimera en fonction du champ \vec{B} et de la vitesse \vec{v} des particules du jet.
3. Application numérique : $v = 500 \text{ m/s}$, $B = 2 \text{ T}$, $D = 1 \text{ cm}$; en supposant le champ uniforme entre les armatures, calculer la tension à vide $V_{A1} - V_{A2}$.



Plongé dans $\vec{B} \Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}}$ réarrange les charges : accumulations de cation au dessus et d'électrons en bas à partir de $t=0$
 \Rightarrow effet condensateur (effet Hall)

① pour l'explication (Hall)

Une fois le bref réarrangement effectué \Rightarrow charges en MRU

Car \vec{F}_{mag} et \vec{F}_{elec} se compensent à nouveau.

(C'est comme l'effet Hall!).

2 || PFD sur un cation ($m, q > 0$) en MRU

$$m \vec{a} = \vec{0} = \vec{F}_{\text{mag}} + \vec{F}_{\text{elec}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \vec{v} \wedge \vec{B} \quad ||$$

Comme tout est \perp : $E = \|\vec{E}\| = vB$

3 || AN : $E = vB = 1000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ Carde : $E = \frac{V_{A_1} - V_{A_2}}{D}$

$$\Rightarrow \underline{U = V_{A_1} - V_{A_2} = ED = 10 \text{ V} \quad ||}$$

EASY