/70

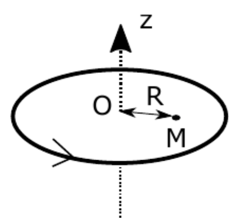
DS5 - correction

1 Tournez manèges – 60 min. /36

Dans tout ce problème on s'intéresse à un point M de masse m posé sur un support solide. On appelle f le coefficient de frottement qui intervient dans la loi de Coulomb : la norme R_t de la réaction tangentielle est inférieure ou égale à la norme R_n de la réaction normale tant que le point M ne glisse pas sur le support ($R_t \leq f R_n$).
Trois situations sont étudiées ici : M posé sur un disque tournant, puis M posé sur la paroi latérale d'un cylindre tournant puis d'un cône tournant. Le but de ce problème est de rechercher la condition d'adhérence de M sur le support.

1.1 Disque tournant

On s'intéresse au système suivant :

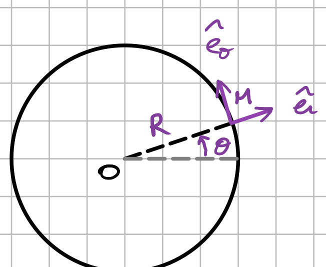


Le champ de pesanteur est parallèle à l'axe (Oz) et M est placé à la distance R du disque tournant à la vitesse angulaire ω

1. Quel est le référentiel galiléen que l'on va utiliser ici ?
2. **Démontrer** l'expression de l'accélération d'un point M en mouvement uniforme sur un cercle de rayon R à la vitesse angulaire ω.
3. Sur le schéma de la feuille annexe (fin du sujet), dessiner les 3 forces qui s'appliquent sur le point M.
4. En appliquant le principe fondamentale de la dynamique à M dans un référentiel bien choisi, montrer que si ω dépasse une valeur limite ω_ℓ alors le point M n'adhère plus au disque. On exprimera ω_ℓ en fonction de l'accélération de la pesanteur g, de R et de f.

1 — 1) On travaille dans le référentiel supposé galiléen.

2 — 2) Vue du dessus

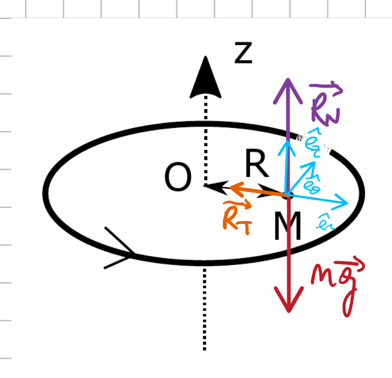


$\vec{OM} = R\hat{e}_r$

$\Rightarrow \vec{v} = R\omega\hat{e}_\theta$ et $\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\hat{e}_r}$

Schéma 2 — 3) BAME : $m\vec{g}$ et $\vec{R_N}$ qui se compensent
$\vec{R_T}$ vers O donné par le PFD

en effet $\boxed{-mR\omega^2\hat{e}_r = -R_T\hat{e}_r}$



4|| **PFD :** $$m\vec{a} = \vec{R_N} + m\vec{g} + \vec{R_T}$$

Avec le mouvement circulaire uniforme :

$$\text{cyl}\begin{vmatrix} -mR\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R_N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R_T \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(PFD) $\cdot\, \hat{e}_z$: $R_N = mg$

Coulomb : Adhérence tant que $R_T \leqslant f R_N = fmg$. Sinon ça glisse

Ça glisse pour $R_T = f R_N = fmg$

3

$\Rightarrow$ (PFD) $\cdot\, \hat{e}_r$ + condition pour que ça glisse =

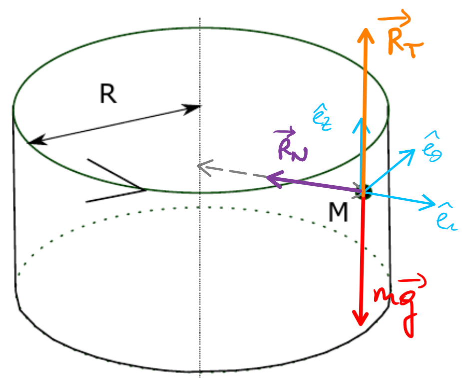
$$-\cancel{m}R\omega_\ell^2 = -f\cancel{m}g \Rightarrow \boxed{\omega_\ell = \sqrt{\frac{fg}{R}}}$$

1.2 Cylindre tournant

On s'intéresse maintenant au système suivant :

Schéma

2



Le but est de maintenir le point M fixe sur la paroi du cylindre de rayon R. Le champ de pesanteur est encore parallèle à l'axe (Oz).

1. Sur le schéma de la feuille annexe (fin du sujet), dessiner les 3 forces qui s'appliquent sur le point M.
2. Montrer que le point M ne glisse pas sur la paroi si ω est plus grand ou plus petit (à vous de le préciser) qu'une certaine valeur limite ω_ℓ à exprimer en fonction de g, R et f.
3. Application numérique : un manège fonctionne sur le principe étudié précédemment. Les personnes se placent contre la paroi et le manège tourne de plus en plus vite. A partir d'une certaine vitesse, le sol se dérobe sous les pieds des gens. A partir de quelle vitesse angulaire, à exprimer en tours par minutes, les personnes vont-elles adhérer à la paroi pour $R = 5$ m, $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $f = 0,8$?

1|| Voir sur la figure ci-dessus (identique à l'annexe à compléter).

2|| On suppose M en mouvement circulaire et uniforme.

On écrit le PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

Pour le MCU :

$$\begin{array}{c|c} & -mR\omega^2 \\ & 0 \\ cyl & 0 \end{array} = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -mg \end{array}\right. + \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ R_T \end{array}\right. + \left|\begin{array}{c} -R_N \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

Coulomb : Adhérence tant que $R_T \leqslant f R_N$

(PFD)$\cdot \hat{e}_z$: $R_T = mg$ et Coulomb dit qu'il y a adhérence si $R_T = mg \leqslant f R_N$

3

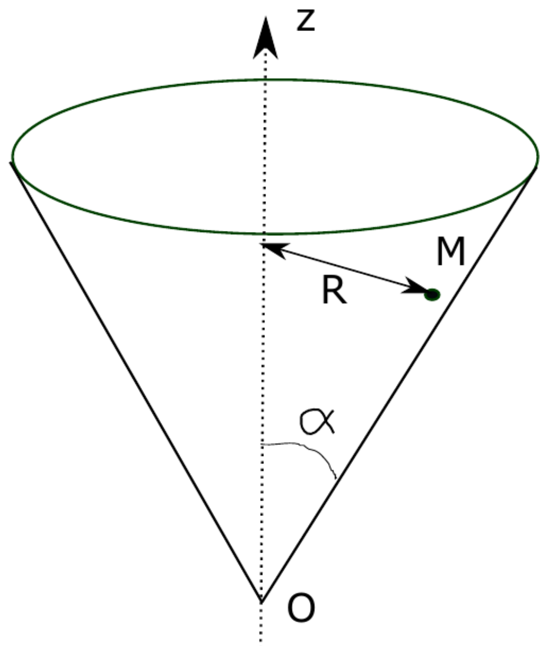
Or $mR\omega^2 = R_N \geqslant \frac{mg}{f}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega \geqslant \omega_L = \sqrt{\frac{g}{fR}}}$

4) AN : $\boxed{\omega_L = \sqrt{\frac{g}{fR}} = 1{,}57 \text{ rad}\cdot s^{-1} = 15 \text{ tour/min}}$

2

1.3 Cône tournant

On s'intéresse enfin au système suivant :



M doit adhérer à la surface intérieure du cône tournant. On appelle R la distance de M à l'axe du cône.

1. Faire un schéma en vue de face (on verra alors un triangle isocèle !) et placer les 3 forces qui s'appliquent sur M quand le cône tourne assez vite (mais pas trop quand même) pour que M adhère : dans ce cas la réaction $\overrightarrow{R_t}$ est dirigée vers le haut.
2. En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant les vecteurs de la base cylindrique $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_z}$, montrer que l'on a

$$mR\omega^2 = R_n \cos\alpha - R_t \sin\alpha \text{ et } mg = R_n \sin\alpha + R_t \cos\alpha$$

3. En déduire que $R_n = m\left(R\omega^2 \cos\alpha + g \sin\alpha\right)$ et que $R_t = m\left(g \cos\alpha - R\omega^2 \sin\alpha\right)$.
4. En déduire que $\omega \geq \omega_1$ avec ω_1 à exprimer en fonction des données du problème. A quel cas (disque ou cylindre) correspond cette situation ? Vérifier qu'en prenant $\alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ on retrouve bien la bonne relation.

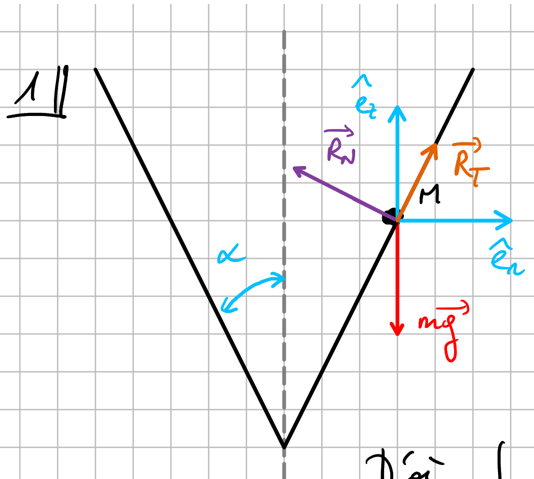
5. Expliquer ce qu'il se passe pour M si le cône tourne trop vite.
6. Reprendre toutes les questions précédentes et montrer que ω doit rester inférieure à

$$\sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{f\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-f\cos\alpha}\right)}$$

7. A quel cas (disque ou cylindre) correspond cette situation ? Vérifier qu'en prenant $\alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ on retrouve bien la bonne relation.

Schéma 2

1)



2) PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

En cylindriques, pour un MRU

$$\text{Cyl}\begin{vmatrix} -mR\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R_N\cos\alpha \\ 0 \\ R_N\sin\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_T\sin\alpha \\ 0 \\ R_T\cos\alpha \end{vmatrix}$$

2+2

D'où $$\begin{cases} mR\omega^2 = R_N\cos\alpha - R_T\sin\alpha \\ mg = R_N\sin\alpha + R_T\cos\alpha \end{cases}$$

3) $(R_N\cos\alpha = mR\omega^2 + R_T\sin\alpha) \times \cos\alpha$

$(R_N\sin\alpha = mg - R_T\cos\alpha)\ \sin\alpha$

1 somme $R_N = mR\omega^2\cos\alpha + mg\sin\alpha$ □

$(R_T\sin\alpha = R_N\cos\alpha - mR\omega^2) \times \sin\alpha$

$(R_T\cos\alpha = mg - R_N\sin\alpha) \times \cos\alpha$

1 $R_T = mg\cos\alpha - mR\omega^2\sin\alpha$ □

4) 1 Il y a adhérence tant que $R_T \leq fR_N$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{m}g\cos\alpha - \cancel{m}R\omega^2\sin\alpha \leq f\cancel{m}g\sin\alpha + f\cancel{m}R\omega^2\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \quad \omega^2(fR\cos\alpha + R\sin\alpha) \geq g(\cos\alpha - f\sin\alpha)$

2 $\Leftrightarrow \quad \omega \geq \omega_1 = \sqrt{\dfrac{g(\cos\alpha - f\sin\alpha)}{R(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$

Ici $\omega \geqslant \omega_1$: ça ressemble au cas du cylindre

1 et pour $\alpha = 0$ on a

$$\boxed{\omega \geqslant \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{Rf}}}$$

C'est bien le cas du cylindre.

5// Si le cône tourne trop vite, la masse m est repoussée

1 vers l'extérieur et va remonter le cône : ça ressemble au cas du disque.

6//

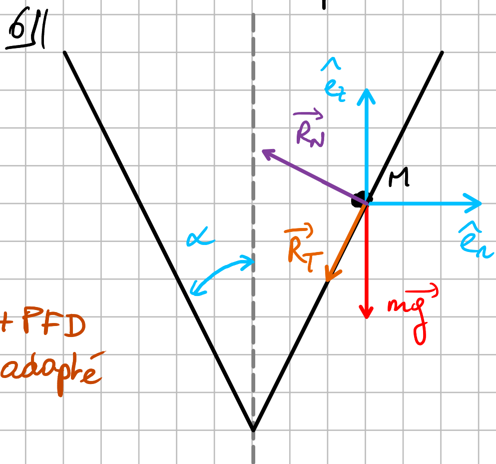


Schéma + PFD adapté

2

Désormais, $\vec{R}_T$ vers le bas

et tant qu'il y a adhérence : $R_T \leqslant f R_N$

PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

En cylindrique + MCU

$$\text{cyl}\begin{vmatrix} -mR\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R_T \sin\alpha \\ 0 \\ -R_T\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -R_N\cos\alpha \\ 0 \\ R_N \sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (mR\omega^2 = R_T \sin\alpha + R_N \cos\alpha) \times \cos\alpha \\ (mg = -R_T\cos\alpha + R_N \sin\alpha) \times \sin\alpha \end{cases}$$

Somme $\quad \boxed{R_N = mR\omega^2\cos\alpha + mg\sin\alpha}$

$$\begin{cases} (mR\omega^2 = R_T \sin\alpha + R_N \cos\alpha) \times \sin\alpha \\ (mg = -R_T\cos\alpha + R_N \sin\alpha) \times \cos\alpha \end{cases}$$

2

différence $\quad \boxed{R_T = mR\omega^2\sin\alpha - mg\cos\alpha}$

Adhérence : $R_T \leqslant f R_N \iff \cancel{m}R\omega^2\sin\alpha - \cancel{m}g\cos\alpha \leqslant f(\cancel{m}R\omega^2\cos\alpha + \cancel{m}g\sin\alpha)$

2

$\iff \omega^2 R(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant g\cos\alpha + fg\sin\alpha$

$$\iff \boxed{\omega \leqslant \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\cos\alpha + f\sin\alpha}{\sin\alpha - f\cos\alpha}}}$$

Ici $\omega \leqslant \omega_2$: la majoration ressemble au cas du disque.

2

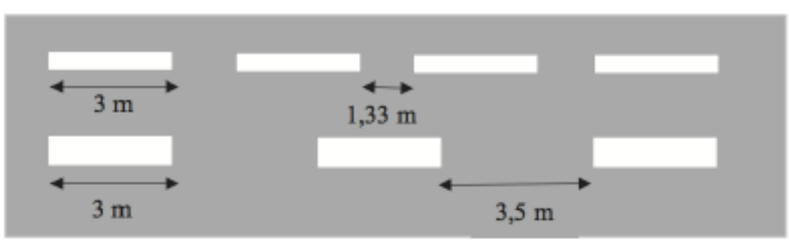
Si $\alpha = \pi/2$, il y a adhérence si :

$$\boxed{\omega \leqslant \omega_2 = \sqrt{\frac{fg}{R}}}$$

2 Sortie de route – 20 min. /10

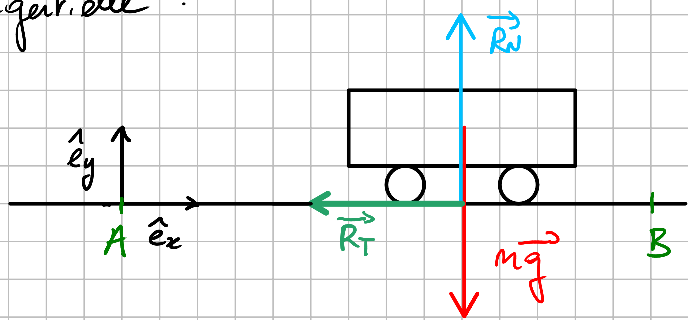
Les causes d'accidents sont nombreuses et variées. Afin d'incriminer ou non un éventuel excès de vitesse lors de la sortie de route liée à un dépassement incontrôlé et décrite sur la photographie, on vous demande de déterminer l'expression littérale, puis numérique de la vitesse du véhicule en début de la phase de freinage. Toutes données pertinentes et nécessaires à la résolution de cette question pourront être introduites par le candidat.

Les éléments légaux de marquage au sol sont représentés ci-dessous :



On rappelle qu'en cas de glissement, la réaction du sol sur les pneumatiques est décrite par la loi de Coulomb : la norme de la réaction tangentielle est égale à f fois la norme de la réaction normale où $f = 0,8$ par temps sec.

On suppose que la seule force résistante est la réaction tangentielle :



<u>Système</u> : {voiture, masse m}

<u>Réf</u> : TSG

<u>BAME</u> : $\vec{R_N}$, $\vec{R_T}$, $m\vec{g}$

Évidement $\vec{R_N} + m\vec{g} = 0$

D'où $\vec{R_N} = \begin{vmatrix} 0 \\ +mg \end{vmatrix}$

<u>Coulomb avec glissement</u> : $R_T = f R_N$

$\rightarrow \quad \vec{R_T} = \begin{vmatrix} -fmg \\ 0 \end{vmatrix}$

Pour une distance de freinage $d = AB$, le travail de $\vec{R_T}$ est

$$\delta W(\vec{R_T}) = \vec{R_T} \cdot d\vec{\ell} = \begin{vmatrix} -fmg \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ 0 \end{vmatrix} = -fmg\,dx$$

$$\Rightarrow \quad W_{AB}(R_T) = \int_{x_A}^{x_B} (-fmg)\,dx = -fmgd$$

6 pour la démarche

<u>TEC</u> : $\forall t$, $\mathcal{P}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v} = 0$ et $\mathcal{P}(\vec{R_N}) = \vec{R_N} \cdot \vec{v} = 0$

Ces forces ne travaillent pas

$$\rightarrow \quad \Delta E_c = W_{AB}(\vec{R_T})$$

Avec $\Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{1}{2} m v_0^2$

D'où $\frac{1}{2} m v_0^2 = fmgd$ et $v_0 = \sqrt{2fgd}$

<u>Analyse de la photo</u> : Sur le côté gauche : 5 bandes blanches de 3 m et 5 espaces de 3,5 m soit $d \simeq 32{,}5\,m$

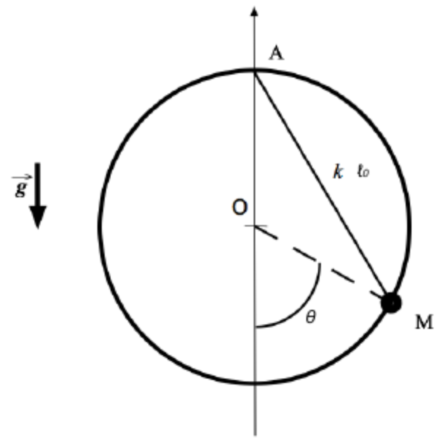
D'où

$$v_0 = \sqrt{2fgd} \simeq 22{,}5\,m \cdot s^{-1} \simeq 81\,km \cdot h^{-1}$$

4 pour AN acceptable

3 Système élastique et énergies – 40 min. /24

On considère un anneau de centre O et de rayon R sur lequel coulisse **sans frottement** une petite perle M de masse m. La perle M est reliée au point A par l'intermédiaire d'un élastique de longueur à vide $\ell_0 = R$ et de constante de raideur k



L'élastique se comporte comme un ressort uniquement si sa longueur est supérieure à ℓ_0 sinon il est détendu !

Ainsi, la masse M est soumise à 3 forces :
— le poids mg dirigé vers le bas,
— la réaction normale du support,
— la force de rappel élastique.

Dans ce problème, on supposera que θ varie dans l'intervalle$[-\theta_{\max};\theta_{\max}]$ pour lequel l'élastique est toujours tendu.

1. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ. On prendra l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$
2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de θ (à une constante près). On ne demande pas de démontrer la formule de base $\frac{1}{2}k\,(\dots)^2$!

Pour la suite, on supposera que $R = 4\dfrac{mg}{k}$

(2+1)

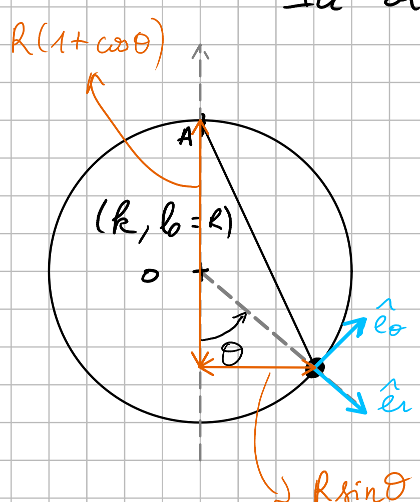
1| $m\vec{g}$ conservative $\Rightarrow E_{pp} = mg \times \text{altitude} + K$

Ici altitude $= R(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow E_{pp}(\theta) = mgR(1-\cos\theta) + K$

Convention : $E_{pp}(\theta = \pi/2) = mgR + K = 0$

$\Rightarrow K = -mgR \Rightarrow \boxed{E_{pp}(\theta) = -mgR\cos\theta}$



2| Quand le ressort est étiré $\ell > \ell_0 = R$

$E_{p\acute{e}l} = \frac{1}{2}k(\ell - R)^2$

Géométrie : $\ell^2 = R^2\left((1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right)$

$= R^2(2 + 2\cos\theta)$

$= 2R^2(1+\cos\theta)$

$= 2R^2(\cos^2\theta/2 + \cancel{\sin^2\theta/2} + \cos^2\theta/2 - \cancel{\sin^2\theta/2})$

Pythagore :-)

2 D'où $\ell^2 = 4R^2\cos^2\theta/2$ et $\ell = 2R\cos\theta/2$

$$E_{p\,él}(\theta) = \frac{1}{2}kR^2\left(2\cos\theta/2 - 1\right)^2$$

3. Montrer que $\frac{mg}{k}$ a bien la dimension d'une longueur.

4. Mettre l'énergie potentielle totale sous la forme suivante : $E_p(\theta) = E_0\left(3 - 8\cos\frac{\theta}{2} + 6\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$ où l'on précisera l'expression de la constante positive E_0 en fonction de m, g et R.
On posera Ω l'angle tel que $\cos\frac{\Omega}{2} = \frac{2}{3}$ (relation α)

5. Montrer qu'il y a une position d'équilibre instable et 2 positions d'équilibre stable qui sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

6. La courbe $\frac{E_p(\theta)}{E_0}$ a l'allure suivante (on notera que le minimum est atteint en $\theta = \Omega$)

2 3) mg en N et k en $N.m^{-1}$ $\Rightarrow$ $\frac{mg}{k}$ en m : longueur

4) $E_p(\theta) = E_{pp}(\theta) + E_{p\,él}(\theta)$

$$= -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\left(2\cos\theta/2 - 1\right)^2$$

avec $kR = 4mg \Rightarrow E_p(\theta) = -mgR\cos\theta + 2mgR\left(2\cos\theta/2 - 1\right)^2$

1 Trigo : $\cos\theta = \cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2 = 2\cos^2\theta/2 - 1$

D'où $E_p(\theta) = mgR\left(1 - 2\cos^2\theta/2 + 8\cos^2\theta/2 - 8\cos\theta/2 + 2\right)$

2 $E_p(\theta) = mgR\left(3 - 8\cos\theta/2 + 6\cos^2\theta/2\right)$ D'où $E_0 = mgR$

5) Les positions d'équilibre vérifient

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow E_0\left(4\sin\theta/2 - 6\cos\theta/2\sin\theta/2\right) = 0$$

2 3 positions d'équilibre $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$ ou $\cos\theta/2 = \frac{2}{3}$ d'où $\theta = \pm\Omega$ par parité de cos

On discute la stabilité avec le signe de la dérivée seconde

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = E_0\left(2\cos\theta/2 - 3\cos^2\theta/2 + 3\sin^2\theta/2\right)$$

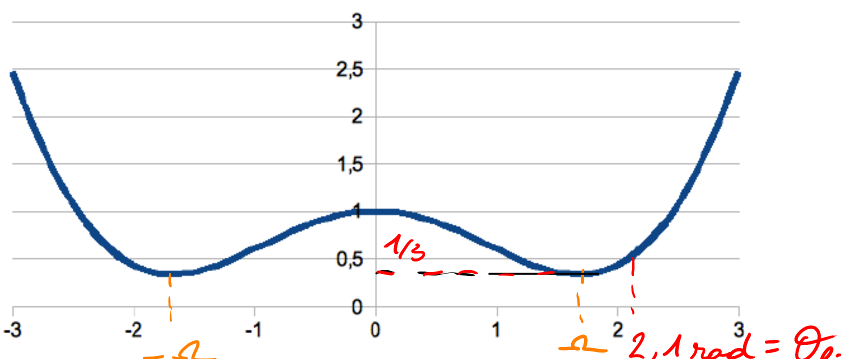
$$= E_0\left(2\cos\theta/2 + 3 - 6\cos^2\theta/2\right)$$

Position $\theta = 0$: $\dfrac{d^2 E_p}{d\theta^2} = E_0\left(2+3-6\right) = -E_0 < 0$ INSTABLE

Rem : C'est cohérent avec notre sens physique !

(4) Positions $\theta = \pm\Omega$: $\dfrac{d^2 E_p}{d\theta^2} = E_0\left(\dfrac{4}{3}+3-\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{5}{3}E_0 > 0$ STABLE

Rem : C'est cohérent avec notre sens physique

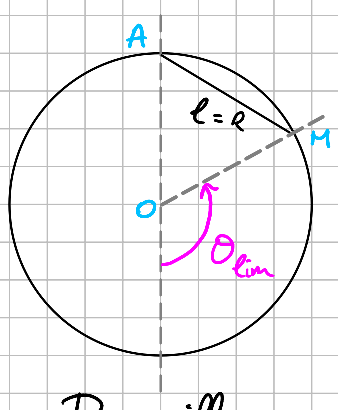


Le minimum de cette courbe vaut exactement 1/3

6. On part d'une situation où la perle se trouve à la position d'équilibre Ω. On lui communique une vitesse V_0. Quelle valeur de V_0 ne doit-on pas dépasser pour que la perle n'aille pas explorer des régions où l'élastique n'est pas tendu ? On donnera la réponse en fonction de E_0 et m puis de g et R. (On lira sur le graphique les valeurs correspondantes de l'énergie potentielles)

7. On part d'une situation où la perle est à la position d'équilibre instable, immobile. Une petite perturbation la fait se déplacer vers la droite. A quelle vitesse passera-t-elle par la position d'équilibre stable ? On donnera la réponse en fonction de E_0 et m puis de g et R. (L'énergie potentielle en $\frac{2\pi}{3}$ vaut $\frac{E_0}{2}$)

6) Le ressort cesse d'être tendu quand $l = R$ (voir figure)



Alors le triangle AOM est équilatéral (angle $\dfrac{\pi}{3}$) d'où $\theta_{lim} = \dfrac{2\pi}{3}$.

AN : $\theta_{lim} \simeq 2,1$ rad

Ces positions correspondent à

$E_p(\theta_{lim}) = 0,5\,E_0 = \dfrac{E_0}{2}$ (voir graphique).

Par ailleurs $E_p(\Omega) = \dfrac{E_0}{3}$

On applique le TEM : il faut que $E_m \leq E_p(\theta_{lim}) = \frac{E_0}{2}$

Or, avec les CI :

$$E_m = \underbrace{E_p(\Omega)}_{\frac{E_0}{3}} + \frac{1}{2} m V_0^2 \leq \frac{E_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m V_0^2 \leq \frac{E_0}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_0^2 \leq \frac{E_0}{3m} = \frac{gR}{3}$$

4 $$\Leftrightarrow \quad \boxed{V_0 \leq \sqrt{\frac{E_0}{3m}} = \sqrt{\frac{gR}{3}}}$$

7) On applique encore le TEM, en partant de $\theta = 0$ avec une vitesse nulle : avec la lecture graphique

$$E_m(\theta = 0) = E_m(\Omega)$$

$$E_p(\theta = 0) = E_p(\Omega) + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_0 = \frac{E_0}{3} + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{2E_0}{3}$$

4 $$\Leftrightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{4E_0}{3m}} = 2\sqrt{\frac{gR}{3}}}$$