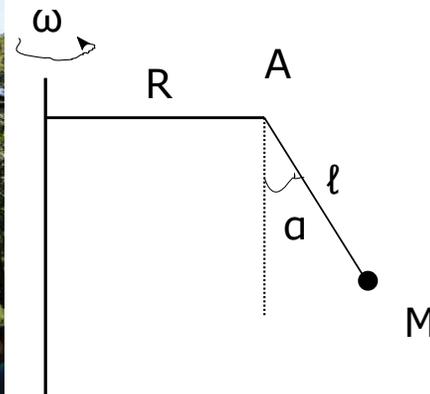


DS n°5 – Durée : 2 heures

1 Les chaises volantes de Vienne à Europa Park

Dans le célèbre parc d'attractions Europa Park, le public peut se détendre dans le quartier autrichien où se trouvent les chaises volantes de Vienne : vous êtes assis dans un siège attaché au bout d'une chaîne et le tout se met à tourner...



Pour simplifier la modélisation, on va supposer que la tête rotative tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω constante. On appelle R la distance entre le point A et l'axe de rotation, ℓ la longueur de la chaîne AM et m la masse du siège avec ses occupants.

1. Reproduire le schéma ci-dessus et placer le centre du cercle décrit par le point M ainsi que le vecteur unitaire radial \vec{e}_r de la base cylindrique. Avec une autre couleur, dessiner les deux forces qui s'appliquent sur le point M .
2. Démontrer l'expression de l'accélération du point M lors d'un mouvement circulaire uniforme.
3. En appliquant le PFD, montrer que l'angle α que fait la chaîne avec la verticale est solution de l'équation $(R + \ell \sin \alpha)\omega^2 = gf(\alpha)$ où l'on précisera la fonction $f(\alpha)$.

4. Question Python OBLIGATOIRE

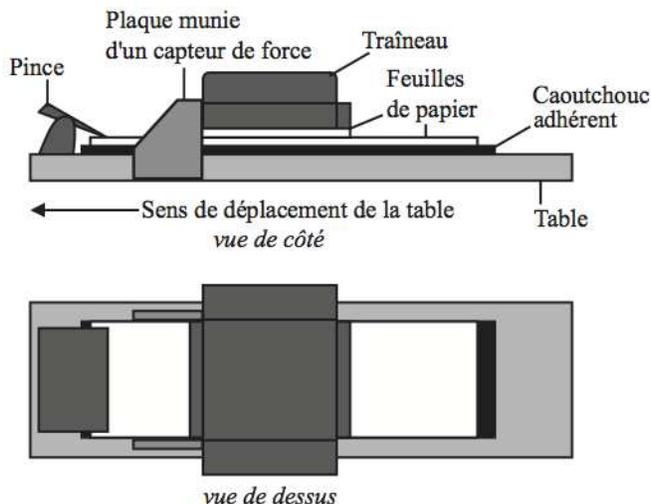
Ecrire une fonction python `trouvalfa(omega,R,l,g)` qui prend en paramètres les valeurs numériques de ω , etc... et qui retourne la valeur de α (en degrés) à l'équilibre. On utilisera l'algorithme de dichotomie sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ et on arrêtera l'algorithme dès que l'on a effectué 1000 tours de boucle afin de ne pas attendre indéfiniment...

2 Frottements solides et lois de Coulomb

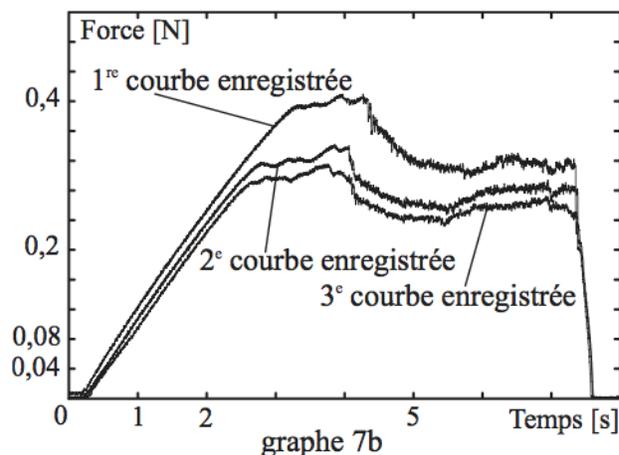
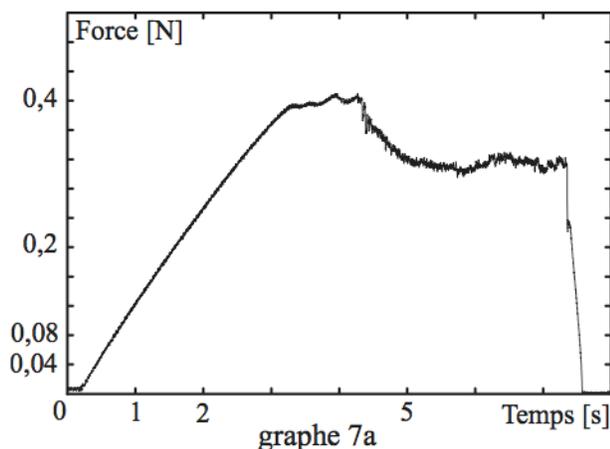
En 1781, Charles-Augustin Coulomb reçut le prix de l'Académie des Sciences pour ses travaux expérimentaux sur les lois du frottement solide. Il est usuel de décomposer la force exercée par le support sur un objet en contact avec ce support à l'aide de deux composantes : l'une tangentielle au support et notée \vec{T} , l'autre, normale et notée \vec{N} . La première loi de Coulomb stipule qu'il existe un coefficient statique μ_s tel que $T \leq \mu_s N$ tant qu'il y a non glissement sur le support (on dit qu'il y a collage aussi).

Quand l'objet glisse sur le support, la deuxième loi de Coulomb stipule que $T = \mu_d N$ où μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

Les technologies modernes permettent de reproduire les expériences de Coulomb avec une très bonne précision. A l'aide du banc d'essai suivant, on peut estimer les coefficients de frottement pour le contact papier/papier, entre deux feuilles de papier.



L'appareil est composé d'une table qui se déplace par rapport au sol le long d'un axe, et d'un traîneau (de masse $m = 1,0 \cdot 10^2$ g) qui est maintenu fixe par rapport au sol, par une plaque munie d'un capteur de force. Une pince maintient une première bande de papier sur une surface adhésive, en caoutchouc, solidaire de la table. Une seconde bande de papier est fixée sur la face inférieure du traîneau au moyen d'un dispositif de serrage non représenté sur la figure. Au début d'une mesure, le traîneau est abandonné sans vitesse sur la surface d'essai. On pousse alors lentement la table. Le capteur de force enregistre la courbe suivante en fonction du temps :



On s'intéresse d'abord au document 7a. Durant la phase de glissement, la table a une vitesse d'environ $v_g = 20$ mm/s, alors que lors de la phase de collage sa vitesse est approximativement de $v_c = 50$ μ m/s.

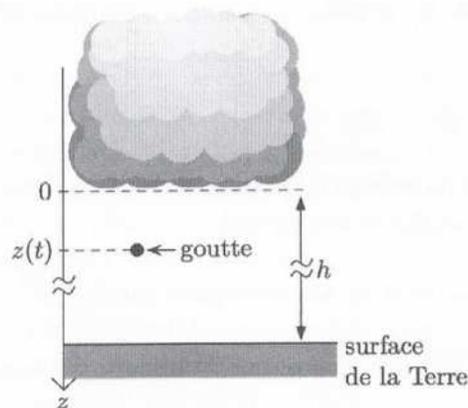
1. Le capteur de force permet-il de mesurer T ou N ?
2. Situer sur le graphique 7a, que l'on reproduira sur la copie, les phases de glissement et de collage.
3. A partir du graphique 7a, estimer les valeurs des coefficients de frottement statique et dynamique pour le contact papier/papier. On remarquera que $\mu_s > \mu_d$.
4. Estimer la taille minimale à prévoir pour le banc d'essai pour réaliser cette expérience. Commenter cette valeur.

On s'intéresse maintenant au graphique 7b. Il présente trois courbes enregistrées successivement avec les mêmes feuilles de papier et toujours pour un même sens de déplacement de la table.

5. Quelle propriété remarquable ce graphe fait-il ressortir ? Comment expliquer ce phénomène ?
On fournit usuellement un intervalle de valeurs pour chaque coefficient de frottement.
6. Le graphe 7b permet-il de comprendre ce choix ? Proposer un intervalle de valeurs pour les coefficients μ_s et μ_d .
7. Si le dispositif n'était plus horizontal mais incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, montrer que l'on ne mesurerait pas directement le coefficient μ_s mais plutôt $\beta \times \mu_s$ où β est un nombre à déterminer.
8. Un déménageur cherche à déplacer une caisse en bois remplie, posée sur du parquet. Il veut la faire glisser en la tirant à l'aide d'une corde, à vitesse supposée constante. Comment doit-on tirer la caisse pour exercer la force la plus faible possible : horizontalement ? à l'oblique ? Dans ce dernier cas, on précisera l'angle par rapport à l'horizontale ? Ce résultat dépend-il de la nature du revêtement de sol ? Il vous appartiendra de bien schématiser la situation !

3 Toute la pluie tombe sur moi...

Considérons un nuage qui s'est formé à une altitude de $h = 1000$ m. On suppose qu'une goutte sphérique de rayon $R = 0,075$ mm, qui s'est formée dans la partie inférieure du nuage chute en direction du sol avec une vitesse initiale nulle. On note ρ_{eau} et ρ_{air} les masses volumiques respectives de l'eau et de l'air et g l'accélération de la pesanteur. L'étude est menée dans le référentiel du sol suivant un axe (Oz) vertical descendant.



Pour les applications numériques, on prendra $\rho_{\text{eau}} = 10^3$ kg/m³ et $\rho_{\text{air}} = 1$ kg/m³. Lors de sa chute dans l'air, la goutte animée d'un mouvement à la vitesse \vec{v} subit une force de frottements fluides appelée force de trainée dont l'expression est

$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2}C_D(Re)\rho_{\text{air}}\pi R^2 \|\vec{v}\| \vec{v}$$

où $Re = \frac{2R\rho_{\text{air}} \|\vec{v}\|}{\eta}$ est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds avec $\eta = 1,8 \times 10^{-5}$ U.S.I. la viscosité de l'air. L'expression du coefficient C_D dépend de la valeur du nombre de Reynolds, on distingue deux cas utiles par la suite :

- pour $Re < 1$: le coefficient C_D s'écrit

$$C_D(Re) = \frac{24}{Re}$$

- pour $1 < Re < 5$: le coefficient C_D s'écrit

$$C_D(Re) = \frac{24}{Re} + \frac{9}{2}$$

Dans toute la suite, la poussée d'Archimède est négligée par rapport aux autres forces s'appliquant sur la goutte.

1. En supposant que $Re < 1$, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la composante $v_z = \vec{v} \cdot \vec{e}_z$ est de la forme

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = g$$

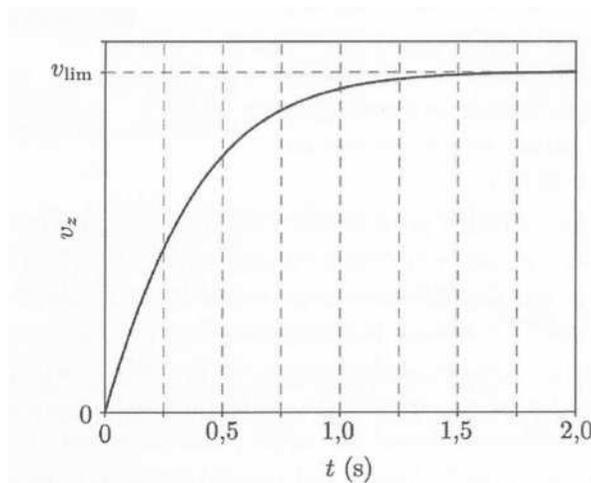
Exprimer τ en fonction des paramètres du problème.

2. Montrer qu'en régime permanent, la goutte atteint une vitesse limite $v_{\text{lim},1}$ dont on donnera l'expression et la valeur numérique.
3. Calculer la valeur du nombre de Reynolds en régime permanent. Discuter de la validité de l'hypothèse $Re < 1$.

On suppose maintenant que $1 < Re < 5$.

4. Montrer que, sous cette hypothèse, la vitesse limite $v_{\text{lim},2}$ de la goutte est solution d'une équation du second degré. Calculer la valeur de la vitesse limite $v_{\text{lim},2}$ puis la valeur du nombre de Reynolds en régime permanent. Discuter de la validité de l'hypothèse $1 < Re < 5$.

La courbe ci-dessous représente la vitesse v_z en fonction du temps dans les premiers instants du mouvement de la goutte. On note v_{lim} la vitesse limite de la goutte déterminée dans le cadre de la modélisation dont l'hypothèse a été validée.

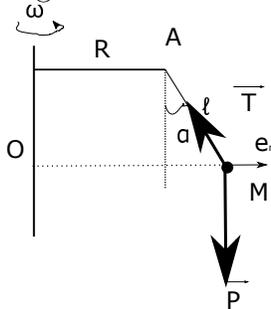


5. Montrer que la distance parcourue par la goutte durant le régime transitoire est très petite devant celle parcourue durant le régime permanent. En déduire que l'on peut raisonnablement supposer que la chute de la goutte se fait à vitesse constante égale à la vitesse limite de la goutte.
6. Calculer la durée de chute de la goutte dans cette approximation. Commenter la valeur de la durée de chute obtenue.
7. Justifier *a posteriori* l'hypothèse selon laquelle la poussée d'Archimède peut être négligée devant les autres forces s'appliquant sur la goutte.

DS n°5 – Corrigé

1 Les chaises volantes de Vienne à Europa Park

1. Figure :



2. Cf. cours $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$

3. PFD : (le rayon du cercle décrit par M est $R + \ell \sin \alpha$) $-m(R + \ell \sin \alpha)\omega^2\vec{e}_r = -mg\vec{e}_z - T \sin \alpha\vec{e}_r + T \cos \alpha\vec{e}_z$.

Projection selon (Oz) : $mg = T \cos \alpha$ que l'on injecte dans la ligne issue de la projection selon r :

$$-m(R + \ell \sin \alpha)\omega^2 = -mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ d'où :}$$

$$(R + \ell \sin \alpha)\omega^2 = g \tan \alpha. \text{ La fonction } f(\alpha) \text{ est donc la fonction } x \rightarrow \tan \alpha$$

4. Script python :

```

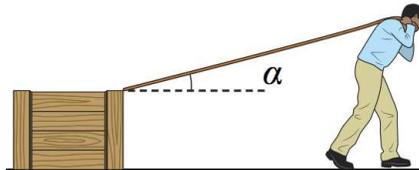
1  from math import sin , tan , pi
2
3  def trouvalpha(omega,R,l,g):
4      def f(x):
5          return (R+l*sin(x))*omega**2-g*tan(x)
6
7      gg=0
8      dd=pi/2
9      for i in range(1000):
10         m=(gg+dd)/2
11         if f(m)*f(dd)<=0:
12             gg=m
13         else:
14             dd=m
15     return m
16 ##### BONUS#####
17 ##### Pour tracer la courbe alpha en fonction de omega #####
18 import matplotlib.pyplot as plt
19 R,l,g=5,5,9.81
20 w=[k*20/1000 for k in range(1000)]
21 al=[trouvalpha(om,R,l,g)*180/pi for om in w]
22
23 plt.plot(w,al)
24 plt.show()

```

2 Frottements solides et lois de Coulomb

1. Le capteur de force permet de mesurer T .

- Collage entre 0 et environ 4s. Glissement entre 4s et 7,5s.
- $\frac{T_{\text{collage}}}{m_{\text{tr}}g} = \frac{0,40}{0,98}$ donc $\mu_s = 0,40$.
- $\frac{T_{\text{glissement}}}{m_{\text{tr}}g} = \frac{0,32}{0,98}$ donc $\mu_d = 0,33$.
- Le texte indique que le glissement se fait à 20mm/s et que cette phase dure un peu moins de 4s. Il faut donc prévoir un banc d'essai d'environ 10cm ce qui semble réaliste au vu de la photo...
- On constate que les différentes traces ne se superposent pas. Ce traduit l'usure de la surface de contact au fil des passages du traineau.
- A cause du phénomène d'usure, l'état de surface change et il est difficile de donner une valeur exacte des coefficients de frottements. Avec ces 3 traces, on peut estimer que $0,3 < \mu_s < 0,4$ et $0,28 < \mu_d < 0,32$
- Par projection des forces, on obtient, en statique : $N = mg \cos \theta$ et $T \leq \mu_s N$ soit $T \leq \mu_s mg \cos \theta$
- Hypothèses : on suppose le sol horizontal, on assimile la caisse à son barycentre. On se place dans le référentiel du sol supposé galiléen et on suppose qu'il y a glissement à vitesse constante. Le système est la caisse.



Les forces prises en compte sont : le poids de la caisse (masse m), la force exercée par la corde sur la caisse (notée \vec{t}), la réaction du sol. Le PFD donne :

$$t \cos \alpha = T = \mu_d \quad \text{et} \quad t \sin \alpha + N = mg$$

On en déduit que $t = \frac{mg}{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\mu_d}}$. On cherche à maximiser le dénominateur par rapport à α : sa

dérivée doit être nulle ce qui donne $\tan \alpha = \mu_d$.

Le résultat dépend du revêtement du sol puisqu'il dépend de μ_d . Moins il y a de frottement et plus l'angle sera petit...

3 Toute la pluie tombe sur moi...

- Dans l'hypothèse où $Re < 1$, la force de traînée s'écrit sous la forme $\vec{F}_t = -6\pi\eta R \vec{v}$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la goutte de masse $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{eau}}$ donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta R \vec{v} + m \vec{g}.$$

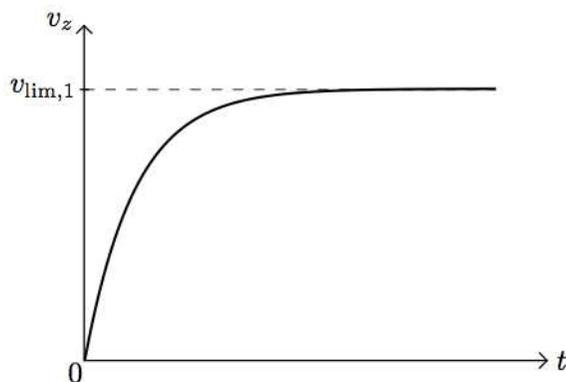
La projection sur le vecteur directeur \vec{u}_z de l'axe vertical descendant donne

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{9\eta}{2R^2 \rho_{\text{eau}}} v_z = g.$$

Par identification, il vient $\tau = \frac{2R^2 \rho_{\text{eau}}}{9\eta}$.

2. Avec la condition initiale $v_z(t=0) = 0$, la solution de l'équation différentielle précédente est

$$v_z(t) = g\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right).$$



Il y a existence d'une vitesse limite car la limite de v_z aux temps longs est finie. Il vient alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = v_{\text{lim},1} = \frac{2gR^2 \rho_{\text{eau}}}{9\eta} = 6.8 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1}.$$

3. .

En régime permanent, le nombre de Reynolds est $\text{Re} = \frac{2R\rho_{\text{air}}v_{\text{lim},1}}{\eta} = 5.7$.

On trouve $\text{Re} > 1$, ce qui n'est pas cohérent avec l'hypothèse de départ et le modèle utilisé pour la force de traînée.

4. .

Dans l'hypothèse où $1 < \text{Re} < 5$, la force de traînée s'écrit sous la forme $\vec{F}_t = -6\pi\eta R \vec{v} - \frac{9}{4}\rho_{\text{air}}\pi R^2 \|\vec{v}\| \vec{v}$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la goutte s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta R \vec{v} - \frac{9}{4}\rho_{\text{air}}\pi R^2 \|\vec{v}\| \vec{v} + m \vec{g}.$$

La goutte chute du nuage vers le sol dans la direction de l'axe (Oz), $v_z = \vec{v} \cdot \vec{u}_z > 0$. Ainsi, $\|\vec{v}\| = v_z$. La projection de la loi de la quantité de mouvement suivant l'axe (Oz) donne

$$m \frac{dv_z}{dt} = -6\pi\eta R v_z - \frac{9}{4}\rho_{\text{air}}\pi R^2 v_z^2 + mg.$$

En régime permanent, la vitesse de la goutte atteint la vitesse limite $v_{\text{lim},2}$, le mouvement de la goutte est alors rectiligne uniforme donc $dv_z/dt = 0$. En notant que $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{eau}}$, on trouve l'équation vérifiée par $v_{\text{lim},2}$

$$\frac{3\rho_{\text{air}}R}{8\eta} v_{\text{lim},2}^2 + v_{\text{lim},2} - \frac{2g\rho_{\text{eau}}R^2}{9\eta} = 0. \quad (3)$$

5. .

L'équation (3) est une équation du second degré dont les solutions sont

$$v_{\text{lim},2\pm} = -\frac{4\eta}{3\rho_{\text{air}}R} \pm \frac{4\eta}{3\rho_{\text{air}}R} \sqrt{1 + \frac{\rho_{\text{air}}\rho_{\text{eau}}gR^3}{3\eta^2}}.$$

La vitesse de la goutte doit être positive, on choisit donc la solution avec un signe « + ». Finalement,

$$v_{\text{lim},2} = -\frac{4\eta}{3\rho_{\text{air}}R} + \frac{4\eta}{3\rho_{\text{air}}R} \sqrt{1 + \frac{\rho_{\text{air}}\rho_{\text{eau}}gR^3}{3\eta^2}} = 4.1 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1}.$$

En régime permanent, le nombre de Reynolds est $\text{Re} = \frac{2R\rho_{\text{air}}v_{\text{lim},2}}{\eta} = 3.4$.

Le nombre de Reynolds calculé vérifie $1 < \text{Re} < 5$, la modélisation de la force de traînée est donc acceptable.

6. .

Le régime transitoire a une durée d'environ $\Delta t = 1$ s. Durant le régime transitoire, la vitesse de la goutte est telle que $v_z < v_{\text{lim}}$ avec $v_{\text{lim}} = v_{\text{lim},2}$ (car le modèle dont l'hypothèse est $1 < \text{Re} < 5$ a été validé). Ainsi la distance parcourue par la goutte est $d_{\text{RT}} < v_{\text{lim},2}\Delta t = 4.1 \times 10^{-1}$ m.

Une fois le régime transitoire terminé, le régime permanent débute jusqu'à ce que la goutte touche le sol. La distance parcourue durant le régime permanent est donc $d_{\text{RP}} = h - d_{\text{RT}} \approx 1000$ m car $h \gg v_{\text{lim},2}\Delta t$.

On a $d_{\text{RP}} \gg d_{\text{RT}}$. La phase transitoire ne représente qu'une très petite partie du mouvement de la goutte. Cette dernière atteint donc rapidement sa vitesse limite $v_{\text{lim},2}$, puis le mouvement est rectiligne uniforme. On peut donc considérer que la vitesse est quasiment constante lors de la chute égale à $v_{\text{lim},2}$.

En supposant la vitesse de chute de la goutte constante égale à $v_{\text{lim},2}$, le temps nécessaire T pour atteindre le sol est :

$$T = \frac{h}{v_{\text{lim},2}} = 2.4 \times 10^3 \text{ s} \approx 41 \text{ min}.$$

7. .

On peut estimer que le modèle est trop simpliste car lorsque la goutte chute, elle va entrer en collision avec d'autres gouttes et former une goutte de rayon plus important. Cette modification de la taille de la goutte va augmenter la vitesse de chute et diminuer le temps mis par la goutte pour arriver au niveau du sol.