

## Exercice pour préparer le DS

### Enoncé : orbite elliptique d'un satellite

On considère un satellite de masse  $m$  se trouvant à une distance  $r$  du centre  $O$  de la Terre. On note  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation,  $M_t$  la masse de la Terre. Dans la suite, le satellite est lancé à une distance  $r_0$  avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) de module  $v_0 = \alpha \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_t}{r_0}}$  avec  $1 < \alpha < \sqrt{2}$

1. Montrer que le mouvement est plan. Montrer aussi que la quantité  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  est constante. Déterminer l'expression (en fonction de  $r_0$  et  $v_0$ ) de cette constante que l'on notera  $\mathcal{C}$ .
2. Justifier avec un argument physique que la trajectoire est bornée.
3. Etablir l'expression de l'énergie potentielle effective en fonction de la constante  $\mathcal{C}$ . Vérifier ensuite que cette énergie potentielle effective s'écrit sous la forme  $\mathcal{G}mM_t \left( \frac{r_0 \alpha^2}{2r^2} - \frac{1}{r} \right)$ .
4. En traduisant la conservation de l'énergie mécanique, trouver l'équation du second degré permettant de calculer la distance au périégée et à l'apogée.
5. Résoudre l'équation précédente et déterminer la distance  $r_{\min}$  au périégée et celle  $r_{\max}$  à l'apogée. On exprimera ces distances en fonction de  $r_0$  et de  $\alpha$ .
6. Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de  $\alpha$  seulement.
7. Quelle est l'expression de la période de révolution du satellite ?

### Corrigé

1. Cours : force centrale donc moment cinétique constant donc  $\overrightarrow{OM}$  constamment perpendiculaire à un vecteur constant : le mouvement est donc plan. Dans la base cylindrique, on a  $\overrightarrow{L}_0(M) = mr\vec{e}_r \wedge (r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta) = mr^2\theta'\vec{e}_z$ . On a donc bien  $\mathcal{C} = r^2\theta'$  constant. D'après les CI's  $\mathcal{C} = r_0 v_0$ .
2. L'énergie mécanique, constante, vaut  $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0} = \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0} \left( \frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) < 0$  : état lié, donc trajectoire bornée.
3. L'énergie potentielle effective est  $E_{p,\text{eff}} = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_t m}{r}$  or  $\mathcal{C} = r_0 v_0$  donc  $E_{p,\text{eff}} = \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0} \left( \frac{\alpha^2 r_0^2}{2r^2} - r_0 r \right)$
4. Aux apsides,  $r \neq 0$  donc  $E_m = E_{p,\text{eff}}$ . On pose alors  $x = \frac{r_0}{r}$  et on doit résoudre  $\frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0} \left( \frac{\alpha^2 r_0^2}{2r^2} - r_0 r \right) = \frac{\mathcal{G}M_t m}{2r_0} \alpha^2 - \frac{\mathcal{G}M_t m}{r_0}$  soit  $\alpha^2 x^2 - 2x + 2 - \alpha^2 = 0$
5. On calcule le discriminant  $\Delta = 4(1 - \alpha^2)^2 > 0$  et on trouve 2 racines réelles  $x_1 = 1$  et  $x_2 = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha^2}$ . La distance au périégée est donc  $r_{\min} = r_0$  (c'est le point de départ) et celle à l'apogée est  $r_{\max} = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} r_0$ .
6. On a alors  $r_0 = \frac{\mathcal{P}}{1 + e}$  et  $r_{\max} = \frac{\mathcal{P}}{1 - e}$  donc en calculant le rapport des deux distances, on arrive à  $e = \alpha^2 - 1$
7. 3ème loi de Képler :  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_t}$  avec  $a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = \frac{r_0}{2 - \alpha^2}$  donc  $T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_t} \frac{r_0^3}{(2 - \alpha^2)^3}}$